Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Philosophisch-historische Klasse
Jahrgang 1917. 2. Abhandlung.

Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst

von

JULIUS RUSKA
in Heidelberg

Eingegangen am 14. Juli 1916

Vorgelegt von C. BEZOLD.

Heidelberg 1917
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1829.

Daß die Mathematik bei den Arabern aus indischen und griechischen Quellen zusammengeflossen ist und vielfach durch Perser, Syrer und Juden in den Strom des geistigen Lebens eingeführt wurde, ist eine Tatsache, die sich ebenso deutlich aus dem Inhalt der arabischen Schriften und der literarischen Überlieferung ergibt, wie sie der geschichtlichen Lagerung der islamischen Gesamtkultur entspricht. Schwierigeren Fragen stehen wir aber alsbald gegenüber, wenn wir diese allgemein anerkannte Abhängigkeit auf bestimmte Quellen zurückführen wollen, wenn wir die auf lange Strecken verschütteten Rinnsale aufzudecken versuchen, in denen die Zufuhr des fremden Stoffes sich vollzog, und wenn wir eine Entscheidung darüber treffen sollen, ob ein bestimmtes Wissen seine Form schon auf dem Weg zur Sammelstelle erhalten hat oder erst dem arabischen Einfluß seine Gestaltung verdankt. Die Schwierigkeiten wachsen, wenn sich Urteile über solche Dinge nicht auf die Quellen erster Hand, sondern auf Übersetzungen und Bearbeitungen stützen, die den Charakter des Originalwerks verwischt haben und vielfach schon von persönlicher Stellungnahme bestimmt sind. Die Versuchung, moderne Ausdrucksweisen und Auffassungen in ältere Werke hineinzutragen oder ihren Inhalt nach modernen Maßstäben zu beurteilen, liegt auf mathematischem Gebiet besonders nahe, da ungewohnte Form und Umständlichkeit der Darstellung Hindernisse raschen Verständnisses sind und es dem Mathematiker gewöhnlich mehr auf den Inhalt, als auf die Form der Erkenntnisse ankommt.

Für alle Untersuchungen, die die Form der Darstellung betreffen, also für die ganze Geschichte der Terminologie, wird man daher immer wieder auf die Originalquellen zurückgehen müssen, um zu neuen oder gesicherteren Ergebnissen zu gelangen.

Eine erneute Untersuchung der ältesten arabischen Algebra schien besonders aussichtsvoll, nachdem sich bei einem flüchtigen Vergleich herausgestellt hatte, daß die von Fr. Rosen 1831 dem

Text der Algebra des Muḥammad b. Mūsā al-Ḫwārazmī[1] beigefügte Übersetzung nicht den Wortlaut wiedergibt, sondern sich ziemlich große Freiheiten gestattet. Sie schien auch darum erwünscht, weil über die Grundlagen der arabischen Algebra so viele entgegengesetzte und sich ausschließende Ansichten geäußert worden sind, daß von einer Erschöpfung des Gegenstandes noch immer nicht gesprochen werden kann. Im weiteren Verlauf der Arbeit stellte sich dann die Notwendigkeit heraus, auch andere Texte und Übersetzungen in den Bereich der Untersuchung zu ziehen, und so ist schließlich eine Reihe von mehr oder minder zusammenhängenden Einzelbeiträgen zur Geschichte der älteren arabischen Mathematik entstanden. Das beigegebene Register wird die Aufsuchung bestimmter Gegenstände der Untersuchungen erleichtern.

[1] Man kann eine ganze Musterkarte von Umschreibungen dieses Namens zusammenstellen; so schreibt Colebrooke (1817) Khuwárezmí, Rosen (1831) of Khowarezm, Woepcke (1863) Alkhârizmî, Marre (1865) Al Khârezm, Rodet (1878) Al-Khârizmi, Hankel (1874) al Ḫovārezmī, Cantor (1880) Alchwarizmî, van Vloten (1895) Al-Khowarezmi, Suter (1900) el-Chowâresmî oder Chwâresmî, Björnbo (1905) Alkwarizmi, Wiedemann (1906) al Chârizmî, Bosmans (1906) El-Chowārizmī, Karpinski (1910) Al-Khowarizmi, Smith (1911) Al-Khowārazmī, Eneström Alkhwarizmi und Alkwarismi. Dazu kommen die alten Formen Alchoarismi in der Übersetzung des Gerhard von Cremona, Alghuarizim, Alguarizin, Algaurizm, Algaurizin in den Handschriften der Übersetzung des Robert Castrensis (Bibl. Math. 3. F., Bd. 11, 1910/11, S. 130; die Formen mit *in* und *im* sind offenbar aus den Formen mit *m* und *mi* entstanden, die mit *au* aus *ua*), Alghoarismi, Algoarismi, Algorismi in der Pratica Arismetrice des Johannes Hispalensis, Algoritmi im Traktat de numero Indorum. Volkstümliche Weiterbildung führt von Algorismus zu *augorisme* und *augrim* (Smith-Karpinski, The hindu-arabic numerals, Boston 1911, S. 120, 121).

Alle Formen mit Khwa- und Chwa- beruhen auf buchstäblicher Umschreibung der Zeichengruppe خوا, die der persischen Sprache eigentümlich ist und etwa *khō* gesprochen wird (vgl. Χωρασμία, Χοράσμιοι). Da der zweite Vokal von خوارزم Ḫwārazm nach Vullers (S. 736) ein Fatḥa ist, lautet die genaue Umschreibung der Nisbe al-Ḫwārazmī oder Alḫwārazmī. Die Wiedergabe von خ durch k, von ز durch s ist falsch, die Umschreibung von خ durch ch oder kh ist nicht eindeutig genug, der allgemeinen Verwendung von Ḫ und ḫ stehen typographische Schwierigkeiten gegenüber. Man vermeidet diese und andere Klippen, wenn man Rosen folgend den Verfasser Muḥammad b. Mūsā nennt. Will man die geschichtlichen Zusammenhänge betonen, so wird man besser Algoritmi oder Algorithmus schreiben, wie man auch Averroes statt Ibn Rušd sagt. So wenig wir das Wort Averroismus durch Ibnrušdismus ersetzen können, so wenig ist die moderne Umschreibung Alḫwārazmi geeignet, die Erinnerung an die Algorithmiker lebendig zu erhalten.

I. Der Titel der Algebra des Muḥammad b. Musā.

Erwähnte Muḥammad b. Mūsā nicht selbst in der Einleitung zu seiner „Algebra“ die Gegenstände, von denen er zu handeln beabsichtigt, so könnte man versucht sein, das uns erhaltene Werk als willkürliche Zusammenfügung von zwei oder drei ursprünglich getrennten Schriften anzusehen. Sein Inhalt entspricht aber durchaus dem, was der Verfasser als seine Absicht bezeichnet: على ان الّفت من حساب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة اليه فى موارثتهم ووصاياهم وفى مقاسماتهم (Rosen مقاسمتهم) واحكامهم وتجاراتهم وفى جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الارضين وكرى الانهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه „ein kurzgefaßtes Buch zu schreiben von dem Rechenverfahren der Ergänzung und Ausgleichung *(ḥisāb alǵabr walmuḳābalah)* mit Beschränkung auf das Anmutige und Hochgeschätzte[1] des Rechenverfahrens für das, was die Leute fortwährend notwendig brauchen bei ihren Erbschaften und ihren Vermächtnissen und bei ihren Teilungen und ihren Prozeßbescheiden und ihren Handelsgeschäften und bei allem, womit sie sich gegenseitig befassen[2] von der Ausmessung der Ländereien und der Herstellung der Kanäle und der Geometrie und anderm dergleichen nach seinen Gesichtspunkten und Arten.“

Wollten wir den Ausdruck الّفت pressen, der ursprünglich die Sammlung und Vereinigung mehrerer Teile eines Dings, ja sogar „the putting many things into such a state *that one name becomes applicable to them,* whether there be to some of the parts a relation to others by precedence and sequence, or not“ bedeutet (Lane Bd. I, S. 80), so könnten wir darin den Hinweis erblicken, daß das Werk ein Auszug aus verschiedenen Quellen ist. Der Verfasser gibt selbst nirgends eine Andeutung, woher er seinen Stoff hat, und

[1] Rosen S. 3: confining it to what is *easiest* and *most useful* in arithmetic; لطيف heißt aber weder „leicht“, noch جليل „nützlich“. Es ist merkwürdig, wie sehr die deutsche Algebra des Chr. Rudolff von Jauer (1525) in ihrem Titel an diese Empfehlung anklingt: „Behend vnnd hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeincklich die Coß genannt werden. Darinnen alles so treülich an tag gegeben, das auch allein auß vleißigem Lesen on allen mündtlichē unterricht mag begriffen werden... Einem jeden liebhaber dieser Kunst lustig und ergetzlich...“

[2] Rosen zieht diesen Satzteil zum Vorausgehenden und fährt mit „*or where the measuring* ...“ weiter.

wieweit ihm persönlich ein Verdienst an der Prägung zukommt. Halten wir uns gegenwärtig, daß er sich als Astronom anerkanntermaßen auf indische Wissenschaft stützte und auch ein Buch über das indische Rechnen verfaßte, so ist die Richtung angegeben, in der man zunächst zu suchen hat. Bevor wir uns aber den Untersuchungen zuwenden, die seit COLEBROOKE darüber veröffentlicht sind, muß der Titel und die Gesamtanlage des Buches etwas genauer betrachtet werden.

Man hat immer wieder dem Erstaunen Ausdruck gegeben, daß Muḥammad b. Mūsā seinem Werk einen Titel gegeben habe, den er nicht erklärt, und daß er dafür zwei Operationen ausgewählt habe, die in dem „eigentlich theoretischen Teile" seines Buches gar nicht vorkommen.[1] Ich glaube, man hat sich das Verständnis dieser Tatsachen ganz unnötig erschwert, indem man das Buch nicht historisch mit den „Augen des Verfassers" (CANTOR a. a. O. S. 728), sondern ohne Rücksicht auf den Gesamtinhalt nur nach den wenigen theoretischen Kapiteln am Anfang beurteilte, die den Geschichtschreiber der Mathematik besonders interessieren.

Schon H. HANKEL hat mit dieser Verschiebung des Tatbestandes den Anfang gemacht, indem er zwar den Inhalt des ersten Teils der Algebra ganz zutreffend kennzeichnet, die geometrischen Kapitel aber davon loslöst und von dem Rest des Werkes bemerkt, daß die dort behandelten Aufgaben über Erbteilungen von keinem wissenschaftlichen Interesse seien, wenn sie auch für Mohammedaner praktisch von größtem Werte waren.[2] Was weiter darüber gesagt wird, geht auf zwei Fußnoten ROSENS (a. a. O. S. 91, 133) zurück. CANTOR hat dann nach A. v. KREMERS Culturgeschichte des Orients noch einige Sätze hinzugefügt und auch auf die Ausführungen von Ibn Ḫaldūn und Ḥāǧǧī Ḫalīfa über Erbteilungswissenschaft hingewiesen.[3] Dieser Abschnitt der Algebra ist nach CANTOR „arabisch durch und durch" und als Grundlage zahlreicher späterer Schriften zu betrachten, die von den Erbteilungen und den dabei vorkommenden Rechnungen ausschließlich handeln. Proben dieser Rechenpraxis

[1] M. CANTOR, Vorlesungen über Gesch. d. Math. I^3, 1907, S. 719.

[2] H. HANKEL, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 260.

[3] Es sollte S. 729 nicht *al farā'iḍ*, sondern *'ilm alfarā'iḍ* heißen; der Ausdruck wäre nicht mit „gesetzlich festgestellte Bedingung", sondern, wie in Ḥāǧǧī Ḫalīfa IV, S. 393, mit „doctrina hereditates dividendi", noch kürzer mit „Erbrecht" zu übersetzen.

sind leider nicht mitgeteilt, und so ist es nicht verwunderlich, daß die jüngste Darstellung dieser Dinge auf eine Häufung von Mißverständnissen hinausläuft.[1]

Es wird weiter unten auf Einzelheiten zurückzukommen sein. Auf dieser Stufe der Untersuchung genügt es, die Tatsache festzuhalten, daß Muḥammad b. Mūsā eine „Algebra" in unserem Sinne nicht schreiben wollte, noch geschrieben hat. Sein Buch will weiter nichts sein als eine auf zahlreiche ausgeführte Musterbeispiele gestützte Einführung in das angewandte Rechnen. Ob es diesen in der Einleitung ausgesprochenen Zweck, zur Lösung von Aufgaben aus dem Gebiet des bürgerlichen Rechnens und der Flächen- und Körperberechnung anzuleiten, nach unseren Ansprüchen ganz erreicht, ist hier nicht zu erörtern; wohl aber sind wir die Antwort auf die Frage schuldig, wie der Verfasser dazu kam, seinem Werk einen angeblich so unverständlichen Titel zu geben.

Wenn wir GÜNTHER glauben sollen, wüßte man erst „späteren Berichten zufolge", daß eine Gleichung für eingerichtet galt, wenn auf beiden Seiten ausschließlich positive Glieder standen, während das Wort Gegenüberstellung dem Weglassen gleicher Größen links und rechts entsprach. Auch CANTOR (I^3, S. 719) und HANKEL (S. 260, Note**) berufen sich auf die Erklärungen späterer arabischer Schriftsteller, und wer will, kann bei ROSEN (S. 180 ff.) oder NESSELMANN (Die Algebra der Griechen, S. 40 ff.) Text und Übersetzung von Originalstellen nachlesen, in denen eine Erklärung der Ausdrücke *alǧabr* und *almuḳābalah* gegeben wird. Kein Zweifel kann darüber bestehen, daß die verschiedenen Übersetzungen der beiden Termini eine klare Vorstellung von ihrem mathematischen Sinn nicht zu geben vermögen. *Restauratio et oppositio* ist ein ebenso unklares Begriffspaar wie *restoring and comparing* (COLEBROOKE) oder *completion and reduction* (ROSEN), *Wiederherstellung und Gegenüberstellung* (CANTOR) oder *Ergänzung und Ausgleichung*, wie ich oben übersetzt habe. Gestehen wir aber dem Autor zu, daß wir ihn ganz gelesen haben müssen, ehe wir ihn kritisieren, so bekommen wir ein wesentlich anderes Bild. Wir begegnen den beiden Aus-

[1] S. GÜNTHER, Geschichte der Mathematik, Leipzig 1908, S. 204: „Die sehr in Einzelheiten sich verlierenden Erörterungen Mohammeds über juristische Arithmetik, bei denen zumal die Erbteilung eine Rolle spielt, müssen sich hier mit bloßer Erwähnung begnügen. Sie waren zweifelsohne für den Kadi und Anwalt von großem Werte und dienen noch im XIV. Jahrhundert dem Ibn Chaldûn, im XVII. dem Hadschî Chalfa als Anhaltspunkt für eigene Betätigung auf dem Felde der Mathesis forensis."

drücken zuerst wieder da, wo der Verfasser ausführt, daß bei dem *ḥisāb alǵabr walmuḳābalah* drei Arten von Zahlen vorkommen, die als جذور *ǵuḏūr* d. i. Wurzeln, اموال *amwāl* d. i. Vermögen, und عدد مفرد *ʿadad mufrad* d. i. alleinstehende Zahl bezeichnet werden.[1] Hieraus ist noch nichts zu entnehmen. Aber schon Seite 15, am Schluß des theoretischen Teils, der die sechs Normalformen der Gleichungen behandelt, wird dem Leser gesagt, daß jede andere Gleichung durch das Verfahren der Ergänzung und Ausgleichung auf eine der sechs Normalformen gebracht werden kann: ووجدنا كل ما يعمل به من حساب الجبر والمقابلة لا بد ان يخرجك الى احد الابواب الستة التى وصفت فى كتابى Der Hinweis wird S. 25 in der Einleitung zu dem „Kapitel von den sechs Fragen" wiederholt, an der Stelle also, wo der Verfasser zu den „Textaufgaben" übergeht, deren Ansatz erst noch auf die eine oder andere der Normalformen gebracht werden muß. Im ersten Beispiel, das in unserer Schreibweise zum Ansatz $x^2 = 40x - 4x^2$ führt, kommt nur «Ergänzung» vor. Nachdem der Ansatz abgeleitet ist, wird das Ergebnis ausdrücklich zusammengefaßt: „Es ist also ein Vermögen gleich vierzig Etwas weniger vier Vermögen" und fortgefahren: „Ergänze es nun durch die vier Vermögen, und füge sie dem einen Vermögen hinzu (فاجبره بالاربعة الاموال وزدها على المال), so werden vierzig Etwas gleich fünf Vermögen; dann ist das einzelne Vermögen gleich acht Wurzeln" usw. Es gehört gewiß nur ein mäßiger Schülerverstand dazu, hiernach zu begreifen, was mit «Ergänzung» gemeint ist. Der gleiche Ausdruck mit derselben umständlichen Erläuterung kehrt im dritten Beispiel wieder. Da aber Rosen an beiden Stellen *reduce it* statt *complete it* übersetzt und auch das فاردده *fa'rdudhu*, das für die Reduktion des Koeffizienten der Unbekannten auf 1 verwendet wird, mit *reduce it* wiedergibt, ist schon hier Verwirrung

[1] Ich gebe die Termini auch in Umschrift, weil die Leser, die sich für Geschichte der Mathematik interessieren, mit der arabischen Schrift und Sprache nur ausnahmsweise Bescheid wissen. In den arabischen Zitaten beschränke ich mich auf den Konsonantentext, soweit nicht besondere Gründe die Beifügung der Vokale oder anderer Lesezeichen notwendig machen. — Das Wort *ǵuḏūr* ist der Plural von *ǵiḏr*, *amwāl* der Plural von *māl*, *mufrad* kommt von *farada, farida*, abgesondert sein, allein sein, einzig sein, einfach sein. Aus der letzten Bedeutung erklärt sich der numerus simplex der lateinischen Übersetzung (Libri, Histoire des Sciences Mathématiques en Italie, 1838, S. 254); besser wäre numerus absolutus gewesen.

in die Terminologie gebracht. Sie wird vollends unheilbar, wenn nachher das richtige *reduce by it*, قابل به *ḳābil bihi*, wofür besser *compare* oder *balance by it* gesagt worden wäre, hinzukommt und mit *complete it* auch noch die Operation des اكمال *ikmāl* oder اتمام *itmām* übersetzt wird. Auch die Hinweise S. 179 (erster und letzter Absatz) können daran für Leser der Übersetzung nichts ändern.

Wie in der zweiten Aufgabe der Sinn des فاردده الى مال واحد „und führe es zurück auf ein einziges Vermögen" sich ganz natürlich aus dem Zusammenhang ergibt[1], so liefert die vierte ein Beispiel für die Anwendung des *ikmāl*, d. h. der «Vervollständigung» durch Multiplikation, also der Wegschaffung eines Koeffizienten, der ein echter Bruch ist: „So vervollständige dein Vermögen, und seine Vervollständigung geschieht dadurch, daß du alles, was du hast, mit zwölf vervielfachst".[2] In der fünften Aufgabe kommt endlich auch «Ausgleichung» vor: „Es sind also fünfzig Dirhem und ein Vermögen gleich neunundzwanzig Dirhem und zehn Etwas; gleiche nun damit aus (فقابل به), und dies besteht darin, daß du wegwirfst von den fünfzig neunundzwanzig, so daß bleibt einundzwanzig Dirhem und ein Vermögen gleich zehn Etwas". In dieser Weise wird durch das ganze Buch hindurch Aufgabe für Aufgabe erläutert, d. h. es wird der Ansatz abgeleitet und jeder Schritt bis zur Lösung der Aufgabe vorgemacht und eingeprägt. Nur im geometrischen Abschnitt ist keine Gelegenheit, das zur Auflösung von Gleichungen dienende Rechenverfahren mit seinen besonderen Ausdrücken anzuwenden.

Man wird hiernach gewiß nicht mehr behaupten können, daß Muḥammad b. Mūsā diese Ausdrücke nirgends erklärt hat, wie schon bei Rosen S. 177 zu lesen ist, zumal die verschiedenen Definitionen aus späterer Zeit auch nur darauf hinauskommen, die „Ergänzung" durch „Hinzufügung" und die „Ausgleichung" durch „Wegnahme gleicher Größen" zu ersetzen.[3] Kein Araber wird den

[1] Das Beispiel ist $100 = 2\frac{7}{9}$ v, woraus durch Division v = 36.

[2] Das Beispiel ist $\frac{v}{12} = x + 24$, woraus v = 12 x + 288. Ich schreibe v statt x^2, um die sprachliche Selbständigkeit der beiden Termini *māl* und *schai'* auch in den Zeichen auszudrücken.

[3] Daß mit solchen Erklärungen häufig nur das Gegenteil von Klarheit erzielt wird, sieht man aus der von Rosen an erster Stelle angeführten Randnote der Handschrift, deren wesentliche Teile ich wenigstens in Übersetzung anführen will: „In this branch of calculation, the method commonly employed is the restoring of something defective in its deficiency, and the adding of an

Ausdruck „Ergänzungs- und Ausgleichungsrechnung“ mißverstanden haben, wenn er sich in das Buch eingelesen hatte und im Text den Imperativen „ergänze“ oder „gleiche aus“ mit den Anweisungen zur Ausführung der Rechnung begegnete. Daß der Verfasser die Operationen erst da erläutert, wo er sie zum erstenmal anwendet, ist ebenso vernünftig und didaktisch richtig, als es zwecklos gewesen wäre, sie schon in dem „eigentlich theoretischen Teile“ zu erwähnen, wo gar kein Gebrauch davon gemacht wird.

Die Frage, ob Muḥammad b. Mūsā die beiden Ausdrücke *alǵabr* und *almuḳābalah* als erster angewandt und in die Praxis der Gleichungen eingeführt hat, oder ob er damit schon einer festen Tradition und alten Übung folgte, wird nur im Zusammenhang mit der Prüfung der gesamten Terminologie und literarischen Form seines Werkes der Lösung näher gebracht werden können. So viel kann jetzt schon gesagt werden, daß wenn bereits eine Tradition bestand, sie auf arabischem Sprachgebiet nur innerhalb der Praxis des Geschäftsrechnens gesucht werden kann. Zeugnisse, die älter wären als die Algebra des Muḥammad b. Mūsā, sind aber bis jetzt nicht bekannt, und so werden wir vorläufig wenigstens mit der Möglichkeit rechnen, daß er selbst bei der Bearbeitung seiner Quellen jene anschaulichen Wendungen an die Stelle der abstrakteren Terminologie der Griechen und Inder gesetzt hat.

---

amount equal to this restoration to the other side, so as to make the completion (on the one side) and this addition (on the other side) to face (or to balance) one another.“

Da ich darauf aufmerksam gemacht werde, daß auch die Erklärungen bei Cantor (I³, S. 719) unklar seien, und Tropfke (Geschichte der Elementarmathematik I, S. 152) modernisierend *dschebr* als „Hinüberschaffen negativer Glieder auf die andere Seite der Gleichung“, *muḳābala* fälschlich als „Vereinigen gleichartiger Glieder auf beiden Seiten zu einem Gliede“ bezeichnet, will ich versuchen, die vier Operationen, durch die jede Gleichung ersten Grades gelöst wird, aus der Anschauung der Araber heraus an einem Zahlenbeispiel zu erläutern. In der Gleichung $13\,x - 5 = 7\,x + 4$ ist die linke Seite „unvollständig“, da sie ein „subtraktives“ oder „fehlendes“ Glied enthält. Sie muß also eingerichtet, vervollständigt, ergänzt werden, wie ein gebrochenes Glied eingerichtet, ein fehlendes ergänzt wird. Der Araber weiß nichts vom „Hinüberschaffen“ eines negativen Glieds oder vom „Ordnen“ der Gleichung; er sagt „ergänze mit fünf“. Die „Vergleichung“ der beiden Seiten $13\,x = 7\,x + 9$ ergibt dann einen Überschuß von $7\,x$, der weggelassen werden kann; also „gleiche mit dem Überschuß $7\,x$ aus“. Die resultierende Gleichung $6\,x = 9$ muß jetzt noch auf $1\,x = 1\frac{1}{2}$ „zurückgeführt“, in Fällen wie $\frac{3}{4}\,x = 6$ zu $1\,x = 8$ „vervollständigt“ werden, damit man den Wert der Unbekannten erhält.

Der allgemeinste aus einer Textaufgabe zu gewinnende Ansatz führt zur Gleichsetzung zweier Ausdrücke, die durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bekannter und unbekannter Größen entstehen. Durch eine hinreichende Anzahl von Umformungen erhält man schließlich zwei Ausdrücke, die die bekannten und unbekannten Glieder nur noch in additiver und subtraktiver Verbindung enthalten. Von dieser Form geht Diophant aus, wenn er an einer oft genannten Stelle des ersten Buches der Ἀριθμητικά sagt: ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐν ἐλλείψεσί τινα εἴδη, δεήσει (¹) προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρων τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται, καὶ πάλιν (²) ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ (ed. Tannery I, S. 14). Die erste Umformung würde arabisch زيادة الاجناس الناقصة على الجملتين (الطرفين) heißen; sie wird kurz und bündig mit dem Wort الجبر *al-ǵabr*, die „Ergänzung“, bezeichnet, das sonst das Einrichten von Knochenbrüchen bedeutet. Die andere Operation ist حذف (اسقاط) المقادير المتشابهة; sie heißt ebenso anschaulich *al-muḳābalah*, d. h. die „Kompensation“ oder „Ausgleichung“.[1] Zu diesen beiden wichtigsten Operationen kommt dann noch الرّد *al-radd*, die „Zurückführung“ des Koeffizienten der Unbekannten auf 1, wenn er größer als 1 ist, und الاكمال *al-ikmāl*, die „Vervollständigung“, wenn der Koeffizient ein echter Bruch ist.

Dies ist der Tatbestand, den wir in der ältesten Algebra vorfinden. Wenn Carra de Vaux in seiner Notiz Sur le sens exact du mot „al-djebr“ (Bibl. Math., 2. Folge, Bd. 11, 1897, S. 1, 2) darauf aufmerksam gemacht hat, daß *al-djebr* „n'est pas toujours opposé au mot *al-mukâbalah*, comme on pourrait le croire d'après le titre de l'ouvrage d'Al-Khârizmi“, sondern daß man es auch im Gegensatz

---

[1] Auch das Kollationieren von Handschriften und die Opposition, also das Gegenübertreten von Sternen wird durch diesen Ausdruck bezeichnet. Nur das Arabische besitzt unter den in Frage kommenden Sprachen die Fähigkeit, das Verhältnis der Wechselseitigkeit durch besondere Verbalformen auszudrücken; die Terminologie erlangt dadurch und in Verbindung mit dem Gebrauch der Duale in vielen Fällen eine unübertreffliche Klarheit und Kürze. So wird z. B. der Satz „Je zwei Gerade schneiden einander, so daß die beiden an ihnen einander gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind“, durch die 7 Worte كل خطين متقاطعين فالزاويتان المتقابلتان منهما متساويتان ausgedrückt, von denen *almutaḳābilatān* „die beiden einander gegenüberliegenden“ die reziproke Form von *ḳābala* darstellt.

zu dem Wort *el-hatt* (الحط) angewandt finde, so beweisen die aus Autoren des 14. Jahrhunderts beigebrachten Belege nichts für die ursprüngliche Anwendung der Termini.

Bei jenen Autoren — es handelt sich um die Arithmetik des Taḳī eddīn el-Ḥanbalī, über den nach H. Suter (Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Abhandlungen z. Gesch. d. math. Wiss., Heft X, S. 199) nur feststeht, daß er vor 1410 lebte, und um eine Schrift des Ibn el-Hā'im, der 1355—1412 gelebt hat (Suter a. a. O., S. 171) — ist von einem Verfahren zur Auflösung von Gleichungen überhaupt nicht die Rede. Es werden die beiden Operationen der Addition und der Multiplikation den beiden Operationen der Subtraktion und der Division gegenübergestellt und jene, da ihre Ausführung zu einer größeren Zahl führt, als *ǵabr*, hier also wohl „Auffüllung" oder „Vermehrung", diese, da eine kleinere Zahl herauskommt, als *ḥaṭṭ*, d. i. „Erniedrigung" oder „Nachlaß" bezeichnet. ‚Es ist *ǵabr*, wenn man sagt, um wieviel mußt du 10 vergrößern, um 17 zu erhalten, oder womit mußt du 10 vervielfachen, um 17 zu erhalten; es ist *ḥaṭṭ*, wenn man sagt, durch wieviel mußt du 10 teilen, oder um wieviel mußt du 10 verkleinern, um 7 zu erhalten.' Wenn Carra de Vaux diese in der älteren Literatur unbekannten Zusammenfassungen mit den modern gedachten Sätzen wiedergibt: „Il est donc clair que le *djebr* c'est l'opération exprimée par les deux équations $a+x=b$, $a.x=b$ et que le *hatt*, c'est l'opération qu'expriment ces deux ci: $a-x=b$, $a:x=b$", und daran den Schluß knüpft, „comme ces quatre opérations sont les plus simples possible de l'algèbre, on doit croire que tel est bien le sens primitif des deux mots", so vermengt er nicht nur ganz verschiedene Dinge, sondern stellt die geschichtliche Entwicklung geradezu auf den Kopf, indem er weiterhin behauptet: „Le mot *djebr* dont nous venons d'indiquer le sens primitif, a ensuite servi à désigner un nombre indeterminé de questions diverses, parmi lesquelles six sont fondamentales, selon Al-Khârizmi . . .; le mot *hatt*, devenu impropre à cause de la complication des problèmes, a disparu devant le mot *mukâbalah*." Mit den sechs Normalformen der Gleichungen, auf die Carra de Vaux anspielt, und mit dem angeblichen Verschwinden des Wortes *mukābalah* haben die Gegensätze *ǵabr* und *ḥaṭṭ* schlechterdings nichts zu tun.

Auch der Versuch Rodets, das Wort جبر *ǵabara* im Sinne von «bereichern» zu deuten (J. As., 7. S., Bd. XI, 1878, S. 38), dürfte kaum Anklang finden, zumal die aus Freytag angezogene Bedeutung *post paupertatem ditavit (amicum)* nach den arabischen Lexikographen ebenfalls auf das Wiederherstellen eines gebrochenen Arms zurückgeht. Näher läge die Bedeutung «auffüllen, nachfüllen, ersetzen», die bei Dozy belegt ist (ياجبر هذا من بيت المال er ersetzte dies aus der Schatzkammer); doch ist auch das eine abgeleitete Bedeutung, und es liegt kein Grund vor, die von sprach- und sachkundigen Arabern selbst gegebene Deutung des Wortes *alǵabr* durch eine andere zu ersetzen.

Für die weitere Geschichte des Wortes „Algebra" ist es von Interesse, daß es schon bei den Iḫwān aṣ-ṣafā, also um das Jahr 1000, ohne den Begriff *mukābalah* zur Bildung des Wortes „Algebraiker" gebraucht wird; denn die Abhandlung über die Zahl, die erste der 56 philosophischen Abhandlungen der Brüder, enthält (ed. Bombay I, S. 37) einen Abschnitt في الضرب والجذر والمكعبات وما يستعمله الجبريون والمهندسون من الالفاظ ومعانيها „Über die Multiplikation und die Wurzel(n) und die Kuben und was die Algebraiker und die Geometer anwenden von den Ausdrücken und ihren Bedeutungen." Sollte der Abschnitt aber eine jüngere Interpolation sein — ich kann meine Bedenken allerdings nicht mit zwingenden Gründen verfechten —, so ist der rein technische Gebrauch des Wortes jedenfalls spätestens bei ʿOmar al-Ḫajjām (gest. 1123) sichergestellt. Denn nachdem er in der Einleitung die *ṣanāʿat alǵabr walmuḳābalah*, die „Kunst" oder Technik der Ergänzung und Ausgleichung definiert hat (ed. Woepcke, S. 4), spricht er weiterhin schlechtweg von den „Lösungen der Algebra", *istiḫrāǵāt alǵabr*, und von den Büchern und den Gepflogenheiten der Algebraiker (S. 4, 5, 7).

Endlich ist einer Erweiterung des Begriffs *alǵabr* zu gedenken, die sich bereits im Rechenbuch des Alkarḫī (gest. um 1030) vorfindet. Sie besteht darin, daß Alkarḫī auch die Wegschaffung von Brüchen, also das, was Muḥammad b. Mūsā als *ikmāl* bezeichnet, unter den Begriff *ǵabr* subsumiert (Cod. Gotha 1474, Bl. 54ᵃ; Hochheim, Al Kâfî fîl Hisâb, III. Teil, S. 10): Wenn sich auf einer der beiden Seiten der Gleichung eine «Ausnahme» *istiṯnā*, d. h. eine subtraktive Größe befindet, muß man auf dieser Seite die gleiche Größe hinzufügen, damit das negative Glied (لفظ الاستثناء *lafẓ al-istiṯnā*, der Ausdruck der Ausnahme) verschwindet, und auf der andern Seite muß man ebensoviel hinzufügen, damit die Gleichheit erhalten bleibt (لتبقى المعادلة); dies ist Ergänzung *alǵabr*. Aber sie findet auch noch in anderer Weise statt. Wenn nämlich eine der beiden Seiten durch eine Zahl (مقدار *mikdār*, Betrag) dividiert ist, so wird der Ausdruck der Division unter Wahrung der Gleichheit dadurch zum Verschwinden gebracht, daß man alles, was man hat, mit dieser Zahl multipliziert. Dies alles geschieht, um das Unbekannte dem Bereich des Bekannten zu nähern und seinem eigenen Bereich fernzurücken. Alle diese Operationen gehören zur Ergänzung, bis die Aufgabe in den Bereich der Ausgleichung *mukābalah* gelangt, d. h. zur Beseitigung der (der Unbekannten) beigesellten Größen.

Man erkennt aus dem Wortlaut deutlich die ursprüngliche Anwendung und die sekundäre Erweiterung des Begriffs. Wenn daher Ibn Ḫaldūn (1332—1406) in seiner Mukaddama bei der Erklärung von *alǵabr walmukābalah* (ed. Beirut 1886, S. 422) den Satz schreibt ويجبرون ما فيها من الكسر حتى تصير صحيحا „und sie richten ein, was darin von Gebrochenem ist, so daß es ganz wird", so hat er die Hauptsache übersehen und sich vom nächstliegenden Wortsinn, also dem „Einrichten" eines gebrochenen Glieds, zu einer mangelhaften Definition verleiten lassen.

II. Das Liber augmenti et diminutionis und das kitāb alǵamʿ waltafrīk.

Es wäre nicht notwendig gewesen, so lange bei dem Titel der Algebra zu verweilen, wenn nicht von der Deutung der Termini das Verständnis der ganzen Entwicklung der Mathematik abhinge, und wenn nicht schon in den Titeln der mathematischen Schriften ein Stück Geschichte enthalten wäre. Ich denke hierbei natürlich auch an das von Libri 1838 im ersten Band seiner Histoire des Sciences Mathématiques en Italie S. 304 ff. veröffentlichte Liber augmenti et diminutionis und die Vermutungen, die über den Inhalt einer Schrift des Muḥammad b. Mūsā geäußert worden sind, von der uns nur der Titel كتاب الجمع والتفريق *kitāb alǵamʿ waltafrīk* überliefert ist (Cantor I^1 S. 627, I^2 S. 687, I^3 S. 730). Hier liegen Schwierigkeiten, um deren Klärung und Beseitigung man seit Jahrzehnten bemüht ist. Woepcke scheint der erste gewesen zu sein, der den arabischen Titel *fi'lǵamʿ waltafrīk* dem liber augmenti et diminutionis gleichsetzte (J. As., 6. S., Bd. I, 1863, S. 514): „J'ajouterai que je trouve dans le Fihrist la mention de deux traités «de l'augmentation et de la diminution» في الجمع والتفريق, c'est à dire de la règle des deux fausses positions, par Send Ben Alî et par Sinân Ibn Alfath, précisément les mêmes qui avaient écrit aussi . . . des traités de calcul indien . . ." Es ist jedoch höchst zweifelhaft, ob man diese beiden Titel miteinander identifizieren darf, denn „Vermehrung" heißt arabisch nicht جمع *ǵamʿ*, und „Verminderung" heißt nicht تفريق *tafrīk*. Liber augmenti et diminutionis würde arabisch كتاب الزيادة والنقصان *kitāb alzijādah walnukṣān* heißen, während ein *kitāb fi'lǵamʿ waltafrīk* etwa mit ‚liber de aggregatione et dispersione' zu übersetzen wäre. Das Verfahren der Vermehrung und Verminderung ist bekannter unter dem Namen der Regel der „zwei Fehler" (reg. elchatayn = الخطأين *alḫaṭā'ain*) oder des doppelten falschen Ansatzes, auch als „Regel der zwei Wagschalen". Cantor hat in seinen Vorlesungen (I^3, S. 731) das erste Beispiel aus dem Liber augmenti et diminutionis, worin der Sinn der Bezeichnung erläutert wird, in deutscher Übersetzung mitgeteilt; den Wortlaut des arabischen Textes kann man leichter nach der alten lateinischen Übersetzung verfolgen. In einem späteren Kapitel dieser Übersetzung (Libri a. a. O., S. 324) wird die Methode ausdrücklich Capitulum numerationis ejus *secundum augmentum et diminutionem*, d. i. باب حسابه بالزيادة والنقصان genannt, in der Überschrift und am Anfang des Buches heißt sie auch *numeratio divinationis*, also „Rechenverfahren des Erratens", was eine freie Wiedergabe der indischen Bezeichnung „Verfahren mit der angenommenen Zahl" zu sein scheint. Die stets wiederkehrenden Wendungen *errasti per . . . addita* oder *cum . . . additis*, *errasti per . . . diminuta* oder *cum . . . diminutis* (ich habe an die Stelle des Zahlworts Punkte gesetzt) entsprechen arabischem خطأت بزائدة bezw. خطأت بناقصة und können nicht durch بجامعة oder بمجموعة bezw. بمفرقة ausgedrückt werden. Voll bestätigt werden diese Rückübersetzungen und kritischen Bedenken durch Behā eddīns „Essenz der Rechenkunst" (ed. Nesselmann, Text S. 26), in der sich bei der Erläuterung der Methode der zwei Fehler der Ausdruck findet وان اخطأ بزيادة او نقصان *wa'in aḫṭa'a bizijādatin au nukṣānin*, was Nesselmann etwas frei mit „wenn es aber abweicht nach einer oder der anderen Seite (um plus oder minus)" übersetzt: lateinisch wäre es *et si erravit per augmentum aut diminutionem* gewesen. Auch die in letzter Zeit von Suter in Übersetzung mitgeteilten arabischen Abhandlungen über die „Regel der zwei Fehler" (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 8, 1907/8, S. 24 und Bd. 9, 1908/9, S. 111 ff.) geben keinen Anhalt dafür, daß das Verfahren mit den Worten *alǵamʿ waltafrīk* bezeichnet worden wäre.

Einen letzten Beweis für die Verschiedenheit der beiden Titel kann man daraus ableiten, daß der Mathematiker Abū Kāmil Šuǵāʿ b. Aslam sowohl ein Buch „über die zwei Fehler", als eines über *ǵamʿ* und *tafrīk* verfaßte. Allerdings hat Suter (Zeitschr. f. Math. u. Physik, Suppl. z. 37. Jahrg., 1892, S. 70) mit Hilfe einer Konjektur — Einschiebung von ويقال له „es wird auch genannt" — beide zu einem einzigen zusammenschweißen wollen, aber das geschieht doch nur Woepckes Übersetzung zuliebe und hat darum keine Beweiskraft. Solange nicht aus dem Inhalt noch zu entdeckender Werke oder mit anderen zwingenden Gründen nachgewiesen ist, daß die beiden Titel gleichbedeutend sind, wird man das Gegenteil als richtig oder wahrscheinlich annehmen müssen.

Was kann aber nun in einem Werke über *ǵamʿ* und *tafrīk* enthalten gewesen sein? Daß es sich um irgendwelche Kapitel der Rechenkunst oder der Algebra handelt, ergibt sich zweifellos daraus, daß der Titel stets in Verbindung mit Schriften arithmetischen Inhalts erwähnt wird. Nun ist die nächste Bedeutung von *ǵamʿ* die der „Vereinigung" oder „Summation". In diesem Sinne wird *ǵamaʿa* nicht weniger als viermal in dem obenerwähnten ersten Beispiel angewandt: *Aggrega* ergo . . ., postquam ergo *aggregasti* . . ., quod *aggregatum est* . . ., deinde *aggrega* . . . Es wird also sprachlich ein Unterschied gemacht zwischen dem „Hinzufügen" und „Vermehren" und der „Vereinigung" gegebener Zahlen zu einer Summe. Nun ist in der Algebra des Muḥammad b. Mūsā der Addition und Subtraktion verschiedener Arten von Größen, die in den Gleichungen vorkommen, ein besonderes Kapitel gewidmet, das im Original mit باب الجمع والنقصان *bāb alǵamʿ walnukṣān*, in der alten lateinischen Übersetzung mit *Capitulum aggregationis et diminutionis* überschrieben ist. Eneström vermutet daher (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 8, 1907/8, S. 184) in der Schrift oder den Schriften, die den Titel *fi'lǵamʿ waltafrīk* führen, Erweiterungen des Capitulum aggregationis et diminutionis. Die Möglichkeit ist nicht von der Hand zu weisen, daß es sich um solche Additionen und Subtraktionen handelt. Unsicher bliebe die Vermutung aber auch dann, wenn der Nachweis

geführt würde, daß *tafrīk* und *nukṣān* schon in älterer Zeit gleichbedeutend für einander gebraucht werden. Denn wir haben keinerlei Anhaltspunkte dafür, daß dieses Kapitel von irgendwem, geschweige schon von Muḥammad b. Mūsā in erweiterter Form außerhalb des Rahmens der Algebra behandelt worden wäre.

Die alten Lexika der Araber wissen nichts von *tafrīk* im Sinne von «Wegnahme» oder Subtraktion. Der zweite Stamm des Verbums فرّق *faraka*, von dem das Verbalnomen *tafrīk* gebildet ist, hat stets nur die Bedeutung „in Stücke zerlegen, trennen, zerstreuen, in Unordnung bringen", niemals die von „wegnehmen" oder „vermindern". Die Verbindung von *ǵamʿ* und *tafrīk* wird also eher den Gegensatz von Sammlung — Zerstreuung oder von Vereinigung — Trennung ausdrücken. Einen solchen Gegensatz finde ich auf dem Gebiet der Algebra nur in dem Kapitel von der Klammerrechnung. Auch diese ist von Muḥammad b. Mūsā in seinen Elementen behandelt, wenn er zeigt, wie Summen und Differenzen zu multiplizieren sind, und es wäre möglich, daß man daraus ein besonderes Kapitel gemacht hat. Die Ausdrücke *dissolutio* und *compositio* allerdings, die in der lateinischen Übersetzung des Euklidkommentars von Annairīzī auftreten (M. Curtze, Anaritii Comm. ad Eucl. S. 89, Cantor I³ S. 387) und als Klammerauflösung und Absonderung in unserem Sinne gedeutet werden könnten, lauten im arabischen Original[1] طريق التحليل *tarīk altaḥlīl* und طريق التركيب *tarīk altarkīb*, d. i. μέθοδος ἀναλυτική und μέθοδος συνθετική. Da jedoch in dem Zahlenbeispiel, das Annairīzī zur Stelle gibt, Summation mit اجتمع und Summe mit مجموع *maǵmūʿ*, das Vereinigte, wiedergegeben wird, so könnte als Ausdruck der „Zerlegung" neben dem قسم *kasama* des Textes, das sich auf die Teilung in zwei Teile bezieht, auch فرّق und تفريق *tafrīk* (für eine Zerlegung in zahlreiche Teile) in Frage kommen. Rein sprachlich besteht für diesen Erklärungsversuch jedenfalls keine Schwierigkeit; sachlich spricht aber wie bei der Eneströmschen Hypothese der Umstand gegen ihn, daß es nicht möglich ist, eine selbständige Behandlung der Klammerrechnungen in der mathematischen Literatur der Araber nachzuweisen.

[1] Besthorn et Heiberg, Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii, Pars II, fasc. 1, 1905, S. 8, 10 u. ö.

Die beiden Fragen der Bedeutung des Titels und der Identifikation des Werks mit anderweit bekannten Schriften Muḥammad b. Mūsās, die bis zu diesem Punkte hatten unentschieden bleiben müssen, finden nun durch Beiziehung der von Boncompagni 1857 herausgegebenen Abhandlung „Algoritmi de numero Indorum" eine ebenso überraschende wie einfache Lösung.[1] Man braucht nur den ersten Absatz der Schrift zu Ende zu lesen, um sie zu finden. Der Text lautet:

Dixit algoritmi: laudes deo rectori nostro atque defensori dicamus dignas, que et debitum ei reddant, et augendo, multiplicent laudem, deprecemurque eum ut nos dirigat in semita rectitudinis et ducat in uiam ueritatis, et ut auxilietur nobis super bona uoluntate in his que decreuimus exponere ac patefacere *de numero indorum* per .ıx. literas, quibus exposuerunt uniuersum numerum suum causa leuitatis atque abreuiationis, ut hoc opus scilicet redderetur leuius querenti arithmeticam, id est numerum tam maximum quam exiguum, et quicquid in eo est *ex multiplicatione et diuisione, collectione quoque ac dispersione* et cetera.

Hier bezeugen die Worte *ex collectione ac dispersione* mit voller Sicherheit arabisches من الجمع والتفريق *min alǵamʿ waltafrīk*, der Zusammenhang mit *ex multiplicatione et divisione* zeigt, daß die Worte im Sinne von Addition und Subtraktion gewöhnlicher Zahlen zu verstehen sind, und das Auftreten der beiden Termini am Anfang der Abhandlung beweist, daß das geheimnisvolle *kitāb alǵamʿ waltafrīk* des Muḥammad b. Mūsā al-Ḫwārazmī nichts anderes ist als die Abhandlung *de numero Indorum*, d. i. sein Buch über das Rechnen mit indischen Zahlzeichen. Der ursprüngliche Titel der Schrift kann *kitāb alǵamʿ waltafrīk biḥisāb alhind* gewesen sein, Muḥammad b. Mūsā hätte danach in gleicher Weise die zwei grundlegenden Rechenoperationen zur Kennzeichnung seiner Rechenanleitung benützt, wie er von den bei der Auflösung der Gleichungen auftretenden vier Operationen die beiden wichtigsten für den Titel seines zweiten

[1] Ich mußte mir die Trattati d'aritmetica, deren erstes Heft von der genannten Abhandlung gebildet wird, einer ganz anderen Frage wegen hierher kommen lassen, nachdem die voranstehenden, mit einem 'non liquet' endigenden Untersuchungen schon abgeschlossen waren. Es schien mir zweckmäßig, sie unverändert aufzunehmen, weil nichts deutlicher die Unsicherheit allgemeiner Erwägungen und die Schlüssigkeit literarischer Beweisführung zeigen kann als dieses Beispiel.

Werkes verwandte. Aus dem vollständigen Titel können dann schon in arabischen Handschriften durch naheliegende Vereinfachung die Titel *kitāb alǵamʿ waltafrīk* und *kitāb alḥisāb alhindī* entstanden sein, die der Fihrist nebeneinander erwähnt, und von denen der letztere in *Algoritmi de numero Indorum* fortlebt. Das gleichzeitige Vorkommen der Titel bei späteren Mathematikern erklärt sich aber ganz einfach daraus, daß die Schrift Muḥammad b. Mūsās in zwei natürliche Abschnitte zerfällt, einen ersten Teil, der die Darstellung des indischen Ziffersystems gibt — das ist *alḥisāb alhindī* oder *ḥisāb alhind* — und einen zweiten Teil, der das Rechnen mit den indischen Ziffern behandelt — das ist *alǵamʿ waltafrīk*. In der Ausgabe von Boncompagni beginnt der zweite, praktische Teil der Abhandlung auf S. 8 mit den Worten: Cum uolueris addere numerum super numerum, uel minuere numerum de numero, pone utrosque numeros in duobus ordinibus. Es ist leicht zu verstehen, daß spätere Autoren aus diesen zwei Abschnitten zwei besondere Bücher gemacht haben; andere werden Muḥammad b. Mūsā gefolgt sein und das Ganze des Rechnens bald unter dem einen, bald unter dem anderen Titel behandelt haben.

Nachdem nunmehr auf Grund der lateinischen Übersetzung des Rechenbuchs von Muḥammad b. Mūsā einwandfrei feststeht, daß das Begriffspaar *ǵamʿ — tafrīk* Addition und Subtraktion bedeuten kann, haben wir uns darüber Rechenschaft zu geben, wie diese spezialisierte, aber überraschend früh auftretende technische Bedeutung von *tafrīk* aus dem Gegensatz *collectio — dispersio* heraus entstanden ist. Wir finden zunächst einen Fingerzeig für die Entwicklung des Begriffs an einer Stelle der ersten Abhandlung der Iḫwān aṣ-ṣafā, in der das Rechnen schlechthin als Vereinigung und Trennung der Zahl definiert wird: واما الحساب فهو جمع العدد وتفريقه (ed. Bombay I, S. 23). Hier haben wir noch die ganz allgemeine Bedeutung der beiden Termini. Wie sich daraus weiterhin die technische Bedeutung entwickeln mußte, verraten uns die Ausführungen Ibn Ḫaldūns über die Rechenkunst, die wir nach der Beiruter Ausgabe von 1886 (S. 421) folgen lassen:
ومن فروع علم العدد صناعة الحساب وهى صناعة علمية فى حساب
الاعداد بالضم والتفريق فالضم يكون فى الاعداد بالافراد وهو الجمع
وبالتضعيف تضاعف عددا باحاد عدد اخر وهذا هو الضرب والتفريق
ايضا يكون فى الاعداد اما بالافراد مثل ازالة عدد من عدد ومعرفة الباقى

وهو الطرح او تفصيل عدد باجزاء متساوية تكون عدتها محصلة وهو القسمة وسواء كان هذا الضم والتفريق فى الصحيح من العدد او الكسر . . . . وكذلك يكون بالضم والتفريق فى الجذور . . . .

„Und zu den Zweigen der Wissenschaft von der Zahl gehört die Kunst des Rechnens, und zwar ist sie eine wissenschaftliche[1] Kunst im Zahlenrechnen durch die Vereinigung *aldamm* und die Trennung *altafrīk*. Die Vereinigung *aldamm* findet statt an den Zahlen in der Vereinzelung[2], und das ist die Addition *alǵamʿ*, und mittels der Verdoppelung (Wiederholung), indem man eine Zahl gemäß den Einheiten einer andern Zahl verdoppelt (wiederholt), und das ist die Multiplikation *aldarb*. Und die Trennung *altafrīk* findet ebenfalls statt entweder in der Vereinzelung[2] wie bei der Entfernung *izālah* einer Zahl von einer Zahl und der Kenntnis der (des) Bleibenden *albākī*, und das ist die Subtraktion *altarh*, oder der Zerlegung *tafṣīl* einer Zahl in gleiche Teile, deren Zahl bestimmt ist, und das ist die Division *alkismah*. Und in gleicher Weise geschieht diese Vereinigung und Trennung an ganzen Zahlen oder Brüchen . . . und ebenso geschieht es mit der Vereinigung und Trennung an den Wurzeln . . ."

Hiermit liegt die terminologische Begriffsentwicklung zutage. Der Begriff der Zerlegung umfaßt sowohl die Wegnahme eines beliebigen Teils wie die Zerfällung einer Zahl in gleiche Teile. Das Wort *tafrīk* wurde aber schon frühe im engeren Sinne verwandt, ohne daß diese Spezialisierung auf das Verbum *farraka* selbst übergriff. Auch Alkarḫī gebraucht das Wort *tafrīk* nur zweimal in seinem Rechenbuch, einmal als Kapitelüberschrift bei der Subtraktion algebraischer Ausdrücke, ein anderes Mal in der Verbindung *alǵamʿ waltafrīk walzijādah walnukṣān* (a. a. O. Bl. 54ᵃ); für das Subtrahieren selbst bedient er sich des Wortes القى *alkā* (Cod. Gotha 1474, Bl. 52ᵃ: التفريق اذا اردت ان تلقى مقدارا من مقدار القيت كل جنس من جنسه). Dasselbe gilt von Behāeddīns Rechenbuch, in dem *altafrīk* in der Überschrift S. 7 und S. 20 auftritt, während im Text allenthalben نقص *nakaṣa* angewandt wird.

Mit unnachahmlicher Kürze drückt der Kommentar zu Ibn al-Hā'ims اللمع فى علم الحساب *allumaʿ fī ʿilm alḥisāb* (Cod. Gotha 1483, Bl. 2ᵇ) den von Ibn Ḫaldun erläuterten Gedanken aus, wenn er sagt: فالتحليل كالطرح والقسمة والتركيب كالجمع والضرب „Die Auflösung *altaḥlīl* ist wie die Subtraktion und die Division, und die Zusammensetzung *attarkīb* ist wie die Addition und die Multiplikation." Hier haben wir die Ausdrücke, die Annairīzī zur Übersetzung von ἀνάλυσις und σύνθεσις verwandte. Es bedarf kaum des Hinweises, daß auch die von Carra de Vaux nach Ibn al-Hā'im angeführten Termini *alǵabr* — *alḥaṭṭ* als Synonyme zu *alǵamʿ* — *altafrīk* zu betrachten sind.[1]

[1] Quatremère liest (Not. et extr. XVIII 1, S. 95) صناعة عملية, De Slane übersetzt daher *art pratique*. Der Beiruter Text ist richtig.

[2] Ich übersetze *bi'lifrād* wegen des nachfolgenden *bi'ltaḍʿīf*; man könnte auch *bi'lafrād* «mit den einzelnen» lesen.

Einer weiteren Anwendung des Terminus *taḥlīl* begegnen wir bei den Iḫwān aṣ-ṣafā, wo vom Wachsen und Abnehmen der Zahlen die Rede ist. Wenn es hier (ed. Bombay I, S. 23) heißt: واما تحليل العدد الى الواحد فعلى هذا المثال الذى اقول انه اذا اخذ من العشرة واحد تبقى تسعة واذا القى من التسعة واحد تبقى ثمانية . . . . „Und was das Auflösen *taḥlīl* der Zahl nach der Eins hin betrifft, so geschieht es nach diesen Beispielen, indem ich sage, daß, wenn von 10 eins weggenommen wird, 9 bleibt, und wenn von 9 eins abgeworfen wird, 8 bleibt" usw. — so sieht man leicht, daß das Verbum *ḥalla* in einer Weise Anwendung findet, die den Keim zu der gleichen Einengung des Begriffs wie bei *tafrīk* in sich trug. Der Sprachgebrauch hat aber nur für *tafrīk*, nicht für *taḥlīl* die Bedeutung «Subtraktion» zu allgemeiner Geltung erhoben.

III. Die Regula Sermonis.

Ich schließe an diese Erörterungen noch eine Bemerkung über das in dem Liber augmenti et diminutionis gelehrte Umkehrungsverfahren, das durch Cantor (I³, S. 732) „unter dem sonderbaren Namen der Wortrechnung, *regula sermonis*" in die Geschichte der Mathematik eingeführt worden ist. Die Textstelle, auf die es ankommt, lautet (Libri S. 312): „Quedam vero harum questionum investigantur secundum regulam que vocatur *infusa*. Et ipsa est *regula Job filii Salomonis divisoris* . . . Ex eis vero est *eius sermo qui dixit* . . . Incipe igitur cum questione ab eius postremitate, et dic . . . ." Und weiterhin S. 313: „Et modus *regule sermonis eius* est . . . ." Zunächst ist klar, daß man das sinnlose *infusa* durch *inversa* zu ersetzen hat. Von höchstem Interesse ist

[1] Vgl. oben S. 12. Aus dem Zitat bei Carra de Vaux geht nicht hervor, welches der Werke von Ibn al-Hā'im unter «Arithmétique» gemeint ist.

weiter, daß das Verfahren auch die Regel des Erbrichters oder Testamentsvollstreckers Ajjūb b. Sulaimān genannt wird — denn so ist das Wort *divisor* nach einer Randnote der Handschrift „Dicitur divisor qui res a defuncto relicta(s) partitur, [et] hoc apud Arabes" zweifellos zu übersetzen. Wir erblicken darin eine Bestätigung der Vermutung, daß die Rechenkunst und die Kunst der Gleichungsauflösung nicht nur bei den Astronomen, sondern ganz besonders auch bei den Notaren und Rechtsgelehrten eine Pflegestätte gefunden hat. Wären uns von Ḥāggī Ḫalīfa (Bd. IV, S. 398) mehr als die drei Worte فرائض ايوب البصري *farā'iḍ Ajjūb al-Baṣrī* überliefert, so könnte die Annahme, daß dieser Ajjūb der Job filius Salomonis ist, auf ihre Berechtigung geprüft werden. Suter sucht (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 3, 1903, S. 350) den Job wie den Verfasser des Liber augmenti et diminutionis unter den spanischen Gelehrten des 10. und 11. Jahrhunderts. Nach ihm können zwei Eijūb b. Soleimān in Betracht kommen, die sich mit Erbteilungen befaßten; die größere Wahrscheinlichkeit spreche für Abū Ṣāliḥ Eijūb b. Soleimān aus Cordova, der 914 starb. Eine Entscheidung zwischen beiden Vermutungen wird erst möglich sein, wenn der vollständige Name des Baṣrensers oder der Autor Abraham selbst feststeht, der das Buch „compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit". Auch wenn sich, wie Suter später in einem Vortrag auf dem III. Internationalen Mathematikerkongreß zu Heidelberg 1904 (vgl. Verhandlungen S. 558) nachzuweisen versuchte, der Ägypter Abū Kāmil Šuǵāʿ b. Aslam hinter dem Namen Ibrāhīm verbergen sollte — eine Vermutung, die mit guten Gründen gestützt wird und noch dadurch an Interesse gewinnt, daß es gerade dieser Autor ist, der im Fihrist als Verfasser eines *kitāb alǵamʿ waltafrīḳ* wie eines *kitāb alḫaṭā'ain* bezeichnet wird (Flügel, Kitāb al-Fihrist, Bd. I, S. 281) — wäre der Baṣrenser als erster arabischer Schriftsteller, der das indische Umkehrungsverfahren in die Technik der Gleichungen eingeführt hätte, in Erwägung zu ziehen.

Wenn aber nun Cantor a. a. O. behauptet, daß dieses Verfahren bei den Arabern den sonderbaren Namen der Wortrechnung geführt habe, so zeigt ein Blick in den lateinischen Text und die Rückübersetzung ins Arabische, daß diese Behauptung auf einem Mißverständnis beruht. Es heißt im Text nicht *regula sermonis*, sondern regula sermonis *eius*, und das ist weiter nichts als die

wörtliche Wiedergabe des arabischen قياس قوله *ḳijāsu ḳaulihi*, eines Ausdruckes, der nichts anderes besagt als „die Regel, die er angibt", wie es schon vorher heißt *eius sermo qui dixit* d. i. قول قائل *ḳaulu ḳā'ilin*. Die „Wortrechnung" wird also künftig aus der Liste der mathematischen Termini verschwinden müssen.

IV. Inhaltsübersicht der Algebra Muḥammad b. Mūsās und Beurteilung ihrer Quellen von Cossali bis Cantor.

Wir kehren zur Algebra des Muḥammad b. Mūsā zurück und verschaffen uns durch Zusammenstellung der Kapitelüberschriften eine erste Übersicht des Inhalts. Es ist bekannt, daß der Text des Buches auf der einzigen Oxforder Handschrift CMXVIII Hunt. 214 ruht, die im Jahre 743 d. H., also um 1342 vollendet wurde (Rosen, S. XIII). Ihr Zustand — it is written in a plain and legible hand, but infortunately destitute of most of the diacritical points — ließe einen Vergleich mit den lateinischen Handschriften, die als Übersetzungen oder Bearbeitungen des arabischen Werkes gelten, sehr wünschenswert erscheinen, zumal auch hier noch manches genauerer Feststellung bedarf. Daß die von Libri im ersten Band seiner Geschichte S. 253 ff. veröffentlichte Übersetzung des Gerhard von Cremona nur die ersten 50 Seiten des Originals, also nur die Algebra im engeren Sinne ohne die Geometrie und Erbteilungsrechnung umfaßt, war z. B. bis vor kurzem nirgends in geschichtlichen Werken vermerkt. Libri selbst weist allerdings in einer ausführlichen Fußnote zu S. 121 (La préface manque dans toutes les trois, et elles se terminent par le chapitre *Conventionum negociatorum*) und in der Vorbemerkung zur Note XII, S. 253 darauf hin, daß die lateinische Übersetzung der drei Pariser Handschriften unvollständig ist. Aber bei Cantor (I^3 S. 719, I^2 S. 675) heißt es einfach „eine alte lateinische Übersetzung", und auch in der dieser Übersetzung gewidmeten Arbeit von Björnbo (Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkwarizmis Algebra usw., Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 6, 1905, S. 239) ist eine Erinnerung an diesen weder selbstverständlichen noch gleichgültigen Umstand unterblieben. Es ist klar, daß durch Unterdrückung der Einleitung, die ausdrücklich auch auf den geometrischen und erbrechtlichen Teil des Werkes hinwies, der Anschein erweckt wird, als sei das übersetzte Bruchstück das ganze Buch. Auffallenderweise reicht auch die um 1145 vollendete Übersetzung des Robert Castrensis nicht weiter, wie aus den von Steinschneider (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 1, 1900, S. 273) gemachten Angaben hervorgeht, da sie mit den Worten *que his attinent agendum est* = وهذا ما يتعامل الناس بينهم abschließt. Erst L. C. Karpinski hat in seiner Abhandlung „Robert of Chester's translation of the algebra of Al-Khowarizmi" (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 11, 1910/11, S. 128) auf das Fehlen der Einleitung und der geometrischen und erbrechtlichen Abschnitte in sämtlichen alten Übersetzungen wieder hingewiesen.

Folgen wir der Kapiteleinteilung des arabischen Textes, so ergibt sich folgender Aufbau des Ganzen:

(Einleitung, S. 1, 2.) Anrufung Gottes, Preis des Propheten, Schilderung der mühevollen Arbeit der Gelehrten, Bericht über die Veranlassung zur Abfassung und über den Zweck des Buches. [fehlt bei Libri]

[**Erster Hauptteil** — ohne Überschrift; S. 3 bis 50.]

Aufbau des Zahlensystems; Definition der in dem Rechenverfahren der Ergänzung und Ausgleichung auftretenden Arten (ضروب *ḍurūb*) von Zahlen; Aufzählung der drei einfachen Fälle von Gleichungen; sodann Beispiele:

„Was anlangt die Vermögen, die gleich sind den Wurzeln . . ." (Drei Beispiele.)

„Was anlangt die Vermögen, die gleich sind der Zahl . . ." (Drei Beispiele.)

„Was anlangt die Wurzeln, die gleich sind einer Zahl . . ." (Drei Beispiele.)

Kurze Zwischenbemerkung über die drei zusammengesetzten Fälle der Gleichungen; sodann Beispiele:

„Was anlangt die Vermögen und die Wurzeln, die gleich sind der Zahl . . ." (Drei Beispiele.)

„Was anlangt die Vermögen und die Zahl, die gleich sind den Wurzeln . . ." (Ein Beispiel.)

„Was anlangt die Wurzeln und die Zahl, die gleich sind dem Vermögen . . ." (Ein Beispiel.)

Eine Schlußbemerkung leitet über zu den geometrischen Beweisen der Auflösungen: „Und ich habe für jedes Kapitel von ihnen eine Zeichnung gezeichnet, durch die auf den Grund der Halbierung hingewiesen wird." Drei Beispiele:

„Was den Grund anlangt, daß ein Vermögen und zehn Wurzeln gleich sind neunundzwanzig Dirhem . . ." (Zwei verschiedene geometrische Beweise mit Zeichnungen.)

„Was anlangt ein einziges Vermögen und zwanzig Dirhem, die gleich sind zehn seiner Wurzeln . . ." (Eine Zeichnung.)

„Was anlangt drei Wurzeln und vier von der Zahl, die gleich sind einem Vermögen . . ." (Eine Zeichnung.)

Das Kapitel von der Multiplikation (باب الضرب *bāb alḍarb;* S. 15 bis 19 oben).

Das Kapitel von der Addition (Aggregation) und Subtraktion (باب الجمع والنقصان *bāb alǵamʿ walnuḳṣān;* S. 19, 20).

Die Teilung (القسم *alḳasm*, S. 20, 21)[1] . . . .
. . . .

„Was anlangt den Grund für die Wurzel von zweihundert ohne zehn, addiert zu (vereinigt mit) zwanzig ohne die Wurzel von zweihundert . . ." (Zeichnung.)

„Was anlangt den Grund für die Wurzel von zweihundert ohne zehn, subtrahiert von zwanzig ohne die Wurzel von zweihundert . . ." (Zeichnung.)

„Was anlangt einhundert und ein Vermögen ohne zwanzig Wurzeln, dazu addiert (damit vereinigt) fünfzig und zehn Wurzeln ohne zwei Vermögen . . ." (Ohne Zeichnung.)

Das Kapitel der sechs Fragen (S. 25 bis 29). Die erste von den sechs . . . Die zweite Frage . . . Die dritte Frage . . . Die vierte Frage . . . Die fünfte Frage . . . Die sechste Frage . . .

[1] Rosen hat durch seine Überschriften On multiplication, On addition and subtraction, On division den charakteristischen Befund im arabischen Text verwischt, daß bei der Teilung das Wort «Kapitel» fehlt. Geht man der auffallenden Tatsache nach, daß das „Kapitel der Teilung" von dem der Multiplikation getrennt ist und daß nicht nur hier, sondern auch in dem Kapitel von der Addition und Subtraktion Beispiele über Multiplikation und Division von Wurzeln enthalten sind, so entdeckt man eine vollständige Verwirrung des Textes. Der ganze Abschnitt in dem *bāb alǵamʿ walnuḳṣān* von S. 19, Z. 12 (Übers. S. 27, Z. 2 v. u.) bis S. 21 unten (Übers. S. 31 bei *Demonstrations*) gehört in ein „Kapitel von der Multiplikation und Division". Löst man ihn aus seiner jetzigen Stelle heraus, so schließen sich an die wenigen Sätze über Addition und Subtraktion von Aggregaten sofort die geometrischen Beweise, deren Anfänge oben mitgeteilt sind. In der lateinischen Übersetzung (Libri S. 269 ff.) liegt die gleiche Textverderbnis vor, sie ist sogar durch Wegfall der Worte *de divisione* noch um eine Stufe weiter fortgeschritten.

Das Kapitel der vermischten Fragen. (Überschrift in besonderer Zeile; 33 mehr oder minder ausführlich behandelte Beispiele; S. 30 bis 48 oben).

Das Kapitel der kaufmännischen Geschäfte (باب المعاملات, als Überschrift; drei Beispiele. S. 48 bis 50).

[Zweiter Hauptteil — ohne besondere Hervorhebung:]
Kapitel der Messung (S. 50 bis 64).

Das Kapitel ist eine lose Aneinanderreihung von geometrischen Definitionen, Eigenschaften von Figuren und Formeln mit Hervorhebung durch Stichworte.

[Dritter Hauptteil — mit Hervorhebung der Überschrift:]
Das Buch der Testamente (S. 65—122).

Ein Kapitel davon über das Kapital und die Schuld (S. 65 bis 67; drei durchgerechnete Beispiele).

Ein anderes Kapitel von den Testamenten (S. 67, 68; zwei erläuterte Beispiele).

Ein anderes Kapitel von den Testamenten (S. 68 bis 71; zwei Beispiele).

In einer anderen Art (وجه) von Testamenten . . . (S. 71 bis 86. Dieser Anfang kehrt dreimal wieder, und zwar zweimal mit 4, einmal mit 8 Beispielen).

Das Kapitel vom Testament mit dem Dirhem (S. 86 bis 92; vier Beispiele).

Das Kapitel von der Vervollständigung (باب التكملة *bāb altakmilah*, S. 93 bis 98; sieben Beispiele).

Das Rechenverfahren bei Schicksalswechsel (حساب الدور *ḥisāb aldaur*, computation of returns[1]).

Ein Kapitel davon über die Verheiratung in der (letzten) Krankheit (S. 98 bis 101; vier Beispiele).

Das Kapitel von der Freilassung (von Sklaven) in der Krankheit (S. 101 bis 116; fünfzehn Beispiele, darunter einige unter Berufung auf Abū Ḥanīfah, dessen Todesjahr 767 war).

[1] Die Übersetzung von Rosen ist falsch. Das Wort *daur* bezeichnet die wechselseitige Vertauschung (A gegen B, B gegen A), in unserm Falle Vertauschung von Erblasser und Erben, wenn der Erbe vorher stirbt. Es kann aber auch allgemeiner mit «Schicksalswechsel» wiedergegeben werden, im Sinne eines unvorhergesehenen Ereignisses, das die testamentarische Verfügung aufhebt oder einschränkt.

Das Kapitel von der Entschädigung bei Schicksalswechsel. (العقر في الدور *al'akr fi'ldaur*, return of the dowry[1], S. 116 bis 120; sechs Beispiele, darunter wieder einige unter Berufung auf Abū Ḥanīfah).

Das Kapitel von der Vorausbezahlung in der Krankheit (السلم في المرض *alsálam fi'l maraḍ*, surrender[2] in illness, S. 121, 122; zwei Beispiele).

Schon diese Inhaltsübersicht kann zum Nachdenken über die Gründe anregen, die den Verfasser veranlaßt haben, drei nach unserer Auffassung ganz heterogene Gegenstände unter dem Sammeltitel *kitāb alǵabr walmuḳābalah* zu vereinigen. Es wäre auch leicht, zu zeigen, wie sich im 10. und 11. Jahrhundert eine Scheidung vollzieht, so daß die Algebra, das Geschäftsrechnen, die praktische Geometrie und die einzelnen Teile der Erbteilungspraxis in besonderen Schriften behandelt werden. Da uns aber vorerst die Quellen und Vorbilder von Muḥammad b. Mūsās Algebra und die Frage nach dem Grade seiner Selbständigkeit beschäftigen sollen, wird eine kurze Darstellung der bisher über diese Dinge geäußerten Urteile dem neuen Versuch, zu einer Entscheidung zu gelangen, vorausgeschickt werden müssen.

Kurz und bündig faßt Cossali 1797 in seiner Geschichte der Algebra[3] seine Überzeugung zusammen. Nichts von geschichtlichen Tatsachen spricht für die Ansicht, daß Muḥammad b. Mūsā die Algebra, die er die Muhammedaner lehrte, den Griechen entlehnte. Er entstammte einem Lande, das weit von Griechenland entfernt war und an Indien grenzt, er war bewandert in der Sprache der Inder, beschäftigte sich eingehend mit indischen Schriften, die er übersetzte, verbesserte, auszog und vervollkommnete, und er war der erste Lehrer der Algebra bei den Muhammedanern. Wenn er

[1] Rosens Übersetzung ist falsch. Es handelt sich um Entschädigung für die Verminderung des Werts einer Sklavin infolge Beiwohnung.

[2] Das Wort *sàlām* bedeutet gewöhnlich Vorausbezahlung vor Empfang der Ware; es scheint sich aber bei den beiden Beispielen um Vorauslieferung oder Verpfändung von Waren zu handeln. Das zugehörige Verbum *áslama* wird von Rosen mit deliver übersetzt.

[3] Cossali, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra, Parma 1797. Da mir das Werk zur Zeit nicht zugänglich ist, muß ich die unsern Autor betreffende Stelle nach der Übersetzung von Colebrooke (Dissertation, S. LXXIX) wiedergeben.

sie also nicht den Griechen entnommen hat, so muß er sie entweder selbst erfunden oder von den Indern entlehnt haben; das letztere aber ist das Wahrscheinlichere.

Auf Grund ausgedehnter Studien in den Quellen der indischen Mathematik und ihrer Vergleichung mit dem Originaltext der Algebra Muḥammad b. Mūsās einerseits, der Arithmetik Diophants andererseits kommt Colebrooke 1817 in seiner *Dissertation* zu dem gleichen Ergebnis: „Neither that comparison, nor the exclusive consideration of the *Khuwárezmí's* performance, leads to any other conclusion, than, as before intimated, that, being conversant with the sciences of the Hindus, especially with their astronomy and their method of numerical calculation, and being the author of the earliest Arabic treatise on Algebra, he must be deemed to have learnt from the Hindus the resolution of simple and quadratic equations, or, on short, Algebra, a branch of their art of computation.“

Auch der Umstand, daß die Darstellungsform der arabischen Algebra von der indischen abweicht und in manchem mehr der diophantischen Behandlungsweise gleicht, ist nach Colebrooke von keinem Belang gegenüber der Tatsache, daß die Araber den Diophant erst gegen Ende des 10. Jahrhunderts kennen lernten und die erste Schrift über Algebra von einem Astronomen herrührt, der die indische Mathematik in allen ihren Zweigen studiert hatte und die indische Rechenkunst seinen Landsleuten zugänglich machte (Diss. S. XXI.). Indische und griechische Algebra seien hinreichend verschieden, um die Annahme unabhängiger Entstehung zu rechtfertigen. Wolle man aber annehmen, daß in Verbindung mit der Astronomie und Astrologie auch Keime der Algebra aus dem griechischen Kulturkreis nach Indien gelangt seien, so habe sich dieser zarte Keim jedenfalls auf dem günstigen Boden Indiens schnell und fruchtbar entwickelt (Diss. S. XXII.).

Colebrooke war der erste, der den arabischen Text der Algebra des Muḥammad b. Mūsā wieder ans Licht zog und die Kapitel über Auflösung der quadratischen Gleichungen durch Übersetzung zugänglich machte. Die vollständige Ausgabe des Textes durch F. Rosen (1831) bot dann die Möglichkeit, die Gesamtleistung des Verfassers kritisch zu untersuchen. Rosen selbst äußert sich nicht über das Werk als Ganzes und stellt sich in der Quellenfrage durchaus auf den Standpunkt von Colebrooke (vgl. Rosen, Preface S. IX, X). Er setzt aber sehr eingehend die Unterschiede zwischen der Form, in der die indischen Astronomen ihre Regeln geben, und der Darstellung

Muḥammad b. Mūsās auseinander: „Bhaskara and Brahmagupta give dogmatical precepts, unsupported by argument, which, even by the metrical form in which they are expressed, seem to address themselves rather to the memory than to the reasoning faculty of the learner: Mohammed gives his rules in simple prose, and establishes their accuracy by geometrical illustrations. The Hindus give comparatively few examples...: the Arab, on the contrary, is remarkably rich in examples, but he introduces them with the same perspicuous simplicity of style which distinguishes his rules. In solving their problems, the Hindus are satisfied with pointing at the result...: the Arab shows the working of each example at full length, keeping his view constantly fixed upon the two sides of the equation, as upon the two scales of a balance...“

Rosen ist der erste, der den elementaren Charakter der ersten arabischen Algebra betont, indem er auf die eigenen Worte des Verfassers hinweist, „that the caliph Al Mamun encouraged him to write a *popular* work on Algebra“. Diesem Hinweis begegnen wir auch bei Libri (a. a. O., S. 121 „un traité d'algèbre populaire“), der den Satz „Quant à l'algèbre, tout concourt à prouver que les Arabes l'ont reçue des Indiens“ S. 118 ff. durch die Betonung des ganz verschiedenen Charakters der von Diophant behandelten algebraischen Aufgaben zu stützen sucht.

Aus der Angabe Muḥammad b. Mūsās, daß ihn das Interesse des Khalifen für die Wissenschaften zur Abfassung seines Werkes ermutigt habe, wird bei Sédillot ein Auftrag Alma'mūns, „de composer un traité d'algèbre populaire“ (Matériaux pour servir à l'hist., 1845—49, S. 447), oder „de rédiger des éléments d'algèbre“ (J. As., 5. Serie, II, 1853, S. 325). Die Doppelbezeichnung *Gebr et Mokabalah* habe allem Anschein nach den Arabern zur Bezeichnung des Werkes von Diophant gedient[1], der stets mit Recht als der Erfinder, „le véritable inventeur“ (J. As., a. a. O., S. 326) der Algebra gegolten habe. Aus dem Umstand, daß Abu 'lwafā (gest. 998) den Diophant übersetzt oder kommentiert habe, dürfe man nicht schließen, daß erst er die Araber mit diesem Autor bekannt gemacht habe; er habe auch den Euklid übersetzt, und

[1] Diese Ansicht scheint sich darauf zu stützen, daß im Fihrist (S. 283, ed. Flügel) das Werk des Abu 'lwafā den Titel تفسير كتاب ديوفنطس فى الجبر führt. Es ist aber ganz natürlich, daß Abu 'lwafā am Ende des 10. Jahrhunderts den landläufigen Terminus wählte, um die „Algebra“ von der theoretischen „Arithmetik“ ارثماطيق zu unterscheiden.

doch seien die Elemente des Euklid seit den Zeiten von Hārūn al-Raschīd in den Schulen von Bagdad gelehrt worden. Auch Rosen gebe zu, daß Muḥammad b. Mūsā seine Aufgaben nach denselben Regeln löse, die Diophant befolgt habe, und die nur weniger leicht verständlich von den indischen Mathematikern gelehrt worden seien. Wenn der Araber nicht die unbestimmten Aufgaben zweiten und ersten Grades behandle, so finde man die Erklärung dafür in der Vorrede des Buches; es war „un libre élémentaire, un manuel pratique à l'usage du peuple", und die Kenntnisse der Araber umfaßten sicherlich ein viel weiteres Gebiet (un horizon plus vaste), da sie sich sogar mit Gleichungen dritten Grades beschäftigten. Die von Rosen beigebrachten Gründe für den indischen Ursprung der arabischen Algebra seien also wenig überzeugend; auch auf den Ausdruck „qui Indorum dictus est" im Liber augmenti et diminutionis könne nichts gegeben werden. Wenn Chasles bewiesen habe, daß selbst unsere zehn Ziffern dem christlichen Westen schon zur Zeit des Boëtius bekannt waren, was bleibe da noch für die Inder übrig? Man dürfe nicht vergessen, daß das Werk des Diophant nur unvollständig auf uns gekommen sei, und daß wir auch keinen der Kommentare besitzen, die die Gelehrten der alexandrinischen Schule und die berühmte Hypatia selbst hinzugefügt haben. Konnten die sieben verlorenen Bücher nicht höhere Theorien enthalten? Konnte nicht ein Grieche jener Zeit die Algebra seines Zeitgenossen vervollkommnet haben? Können nicht Aryabhatta und Brahmegupta einfach Abschreiber der alexandrinischen Gelehrten gewesen sein? Alles spreche dafür, daß Bhaskara aus arabischen, Brahmegupta aus griechischen Quellen geschöpft habe. Die Priorität der Griechen könne auf dem Gebiet der Algebra ebensowenig bestritten werden als auf anderen Gebieten der Wissenschaft, und weder die Griechen noch die Araber hätten von den Indern wissenschaftlich etwas zu lernen gehabt (S. 461).

Es war notwendig, diesen scharfen Protest gegen die Überschätzung der Inder in einiger Ausführlichkeit wiederzugeben, da er sowohl Hankel wie Cantor entgangen zu sein scheint. Ob sich Woepcke mit der Quellenfrage eingehender beschäftigt hat, ist mir nicht bekannt; er scheint ganz auf dem Boden der herkömmlichen Überlieferung zu stehen, da er Alkhârizmî den Autor nennt, „que nous pouvons considérer comme l'introducteur par excellence de l'astronomie, de l'algèbre et de l'arithmétique indiennes parmi les Arabes de l'orient" (J. As., 6. Sér., Bd. I, 1863, S. 514).

Die erste aus einer kritischen Betrachtung der Mathematikgeschichte hervorgegangene Würdigung der vollständigen Algebra Muḥammad b. Mūsās verdanken wir Hankel (Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, 1874, S. 259 bis 264 und S. 271). Was die indische Mathematik anlangt, so kann nach ihm kein Zweifel darüber sein, daß die Männer, die sie in ihrer originalen Weise entwickelten, selbständige wissenschaftliche Forscher waren (S. 181). Sie seien zwar, was die materielle Seite der Algebra betrifft, nicht eben viel über das hinausgekommen, was auch Diophant bereits geleistet habe, aber wenn man unter Algebra die Anwendung arithmetischer Operationen auf zusammengesetzte Größen aller Art, mögen sie rationale oder irrationale Zahl- oder Raumgrößen sein, versteht, so seien die gelehrten Brahmanen Hindustans die wahren Erfinder der Disziplin. Ihre größte Leistung liege auf dem Gebiete der unbestimmten Analytik. Seit Āryabhaṭṭa kennen die Inder eine Methode, um die Gleichung ersten Grades $ax + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen; die Methode der Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades nennt Hankel das Feinste, was in der Zahlenlehre vor Lagrange geleistet worden sei. Da nun am Ende aller griechischen Wissenschaft ohne Vermittlung mit dem, was diese bis dahin geleistet hatte, plötzlich auch auf griechischem Boden die Algebra in einer Form, wie sie niemals am Anfang einer selbständigen Entwicklung statthaben kann, und in einem zwar vorgeschrittenen, doch unfertigen, hastigen Zustande erscheine, in Indien aber eine organisch reiche Entwicklung der Wissenschaft vorliege, welche die Algebra Diophants beinahe vollständig umschließe, so sei es wahrscheinlich genug, daß diese nur ein abgerissener Zweig von dem Baume indischer Wissenschaft sei, der, nach Alexandrien verpflanzt zwar neu zu treiben begonnen habe, doch, ohne Wurzeln schlagen zu können, bald spurlos untergegangen sei (S. 204). Das Verhältnis Diophants zu den Indern sei so zu denken, daß er bereits eine bunte Mannigfaltigkeit von Aufgaben vorfand, die er dann, mit eigenen scharfsinnigen Entwicklungen versehen, in einer dem griechischen Geiste entsprechenderen Form zusammenstellte (S. 205).

Auch der erste, rein mathematische Teil von Muḥammad b. Mūsās Algebra errege bei seiner Dürftigkeit wenig sachliches Interesse. Die Abweichungen von der Algebra der Inder seien indessen erheblich genug, um der Annahme indischer Entlehnung Schwierigkeiten zu bereiten. Besonders auffallend findet Hankel, daß Muhammad b. Mūsā die Zeichensprache seiner indischen Vorbilder gänzlich ignorierte. Da aber auch erhebliche Unterschiede gegen Diophant vorhanden sind, so bleibe nur die Annahme, daß er nach einer Tradition arbeitete und mit jenen Operationen *al ǵebr w'al mukabala* seine Landsleute nichts durchaus Neues und Fremdes lehrte. Diese Tradition müsse bei den Syrern und den Persern vorausgesetzt werden. Bei ihnen möge sich unter dem doppelten Einflusse griechischer und indischer Wissenschaft diese vermittelnde Algebra, die Züge der einen und der andern trage, aber hinter beiden an wissenschaftlichem Werte zurückstehe, herausgebildet haben.

Die höchste Einschätzung der indischen Algebra und die entschiedenste Leugnung irgendwelchen Zusammenhangs zwischen der arabischen und indischen Algebra finden wir bei L. Rodet (L'algèbre d'Alkhârizmi, J. As., 7. Sér., Bd. 11, 1878, S. 5 bis 98). Auf Grund eines erneuten Studiums der Originaltexte kommt dieser Gelehrte zu folgenden Ergebnissen:

1) Es gab in Indien spätestens seit Ende des 5. Jahrh. eine Schule von Algebraikern, die in diesem Zweige der mathematischen Wissenschaft erstaunliche Fortschritte erzielt hatte. Diese Schule, vielleicht befruchtet durch eine erste Grundlage griechischen Wissens, vielleicht auch im Besitz von wissenschaftlichen Kenntnissen, die auf babylonische Quellen zurückgehen, ist der griechischen Schule sowohl in Hinsicht auf Allgemeinheit der Ideen als auf Eleganz der Rechnung unendlich überlegen.

2) Die Araber haben entgegen ihren eigenen Versicherungen die indische Wissenschaft nicht nach dem Westen gebracht. Muhammad b. Mūsā insbesondere hat in seiner Algebra nichts gelehrt, was an seinen um beinahe ein Jahrhundert älteren Vorgänger Brahmagupta oder selbst an den drei Jahrhunderte älteren Āryabhāṭṭa erinnert. Seine Ideen, seine Methode, sein Rechenverfahren sind rein griechisch und in vielen Fällen absolut identisch mit dem, was wir in dem Werke Diophants geübt sehen.

Rodets Untersuchung beginnt jeweils mit einem Passus aus Muhammad b. Mūsās Algebra und stellt seinen Methoden die Originalstellen aus Bhāskara und Āryabhāṭṭa mit Übersetzung sowie Zitate nach Colebrookes Übersetzung von Brahmagupta einerseits, den griechischen Diophant mit Übersetzung andererseits gegenüber; sie erstreckt sich auf die Behandlung der positiven und negativen Größen in algebraischen Ausdrücken, auf das Verfahren, die Endgleichung herzustellen, auf die Methode der Auflösung der vollständigen Gleichung zweiten Grades und auf die Interpretation der doppelten Lösung für den Fall zweier positiver Wurzeln. Auch die Wichtigkeit der Terminologie wird gebührend hervorgehoben: les expressions choisies par un écrivain créateur, comme Al-Khârizmi, d'un vocabulaire scientifique, permettent souvent d'appercevoir quelle est au fond l'idée qui l'a conduit au choix de ces expressions, et, par conséquent, de se rendre compte, jusque dans les plus intimes détails, de ses notions scientifiques. Weniger glücklich sind Bemerkungen wie die, daß Muhammad b. Mūsā den Diophant in einer syrischen oder Pehleviübersetzung oder gar im Urtext gelesen haben könne, und daß den baktrischen Persern, unter denen Al-Khârizmi aufwuchs, die *principes de l'algèbre grecque* bekannt gewesen seien. Es beweist gewiß auch nichts für eine Bekanntschaft des Muhammad b. Mūsā mit Diophant, wenn ein Autor des 16./17. Jahrhunderts wie Behā eddīn eine Definition von *alǵabr walmukābalah* gibt, die nach Rodet die buchstäbliche Übersetzung einer Diophantstelle sein soll (S. 38, 39, 43). Besonders aber dürfte nicht Bhāskara, der dem 12. Jahrhundert angehört, durchweg an erster Stelle als Zeuge für den höheren Stand indischer Algebra gegen Muhammad b. Mūsā ins Feld geführt werden.

Seit Rodet hat kein Sanskritist oder Arabist mehr den Text des Muhammad b. Mūsā genauer untersucht. Wohl aber hat in allerneuester Zeit ein englischer Gelehrter in Simla, G. R. Kaye, den mathematischen Schriften und Methoden der Inder ein erneutes Studium gewidmet und ist dabei zu wenig schmeichelhaften, der Rodetschen Verhimmelung der Inder direkt entgegengesetzten Ergebnissen gekommen. Für unseren Zweck dürfte es genügen, einige Stellen aus der Abhandlung 'Some notes on Hindu mathematical methods' (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 11, 1910/11, S. 289 ff.) in Übersetzung wiederzugeben.

S. 289: „In Indien war die Mathematik stets nur die Magd des religiösen Rituals, das gewisse Seiten der Astronomie und Astrologie umfaßte, und der Handelsgeschäfte; es ist fraglich, ob reine Mathematik jemals um ihrer selbst willen in diesem Lande gepflegt wurde. Die Regeln wurden mehr oder weniger als handwerksmäßige Regeln *(rules of thumb)* gelehrt, die man kennen mußte, um Rechnungen zu erledigen, die zur richtigen Ausführung gewisser religiöser oder halbreligiöser Zeremonien gehörten, oder deren man sich für Zwecke des Handels bedienen mußte. Das Gebiet der Mathematik ist nie als wesentlich für eine höhere Erziehung betrachtet worden und bildet heute höchst selten einen Teil des Lehrgangs der Sanskritschulen in Indien. . . .“

S. 298: „Die Hindu sind niemals zuverlässige Beurteiler ihrer eigenen Methoden gewesen, und wir dürfen die Meinungen von zeitgenössischen Fremden nicht vernachlässigen, wenn sie zugänglich sind. Glücklicherweise können wir die Ansichten Alberunis anführen, eines tüchtigen Mathematikers und besonnenen Kritikers, der Indien in der Zeit zwischen Brahmagupta und Bhaskara besuchte. Die Ansichten Alberunis sind den Hindu nicht besonders günstig, was ihre mathematischen Fähigkeiten anlangt, aber das nimmt seiner Kritik nichts an Wert, wie manche Hindu meinen. Er schreibt wie folgt (Alberuni's India ed. E. C. Sachau I, p. 25): ‚Man findet meist, daß selbst die sogenannten wissenschaftlichen Sätze der Inder sich in einem Zustand äußerster Verwirrung befinden, bar jeder logischen Ordnung . . . , da sie sich nicht zu den Methoden streng wissenschaftlicher Deduktion erheben können‘. Und weiter: ‚Ich begann ihnen die Elemente darzulegen, auf welchen diese Wissenschaft ruht, und ihnen einige Regeln der logischen Deduktion und die wissenschaftliche Methode aller Mathematik auseinanderzusetzen; da scharten sie sich um mich zusammen von allen Seiten‘. Die Belege, die wir gegeben haben, sind geeignet, die Ansicht Alberunis zu bestätigen; wir müssen schließen, daß die indischen Mathematiker kein Interesse an dem hatten, was wir mathematische Methode nennen. Sie gaben keine Definitionen, sie bewahrten wenig logische Ordnung, sie kümmerten sich nicht darum, ob die Regeln, deren sie sich bedienten, gehörig bewiesen waren oder nicht, und waren im allgemeinen gleichgültig gegen grundlegende Prinzipien. Sie schätzten Mathematik nie als einen Gegenstand des Studiums, und in der Tat kann ihr Verhältnis zur Wissenschaft als entschieden unmathematisch gekennzeichnet werden.“

Die Darstellung, die M. Cantor in den drei Auflagen seiner Vorlesungen von der ältesten Geschichte der arabischen Mathematik und insbesondere von den Beziehungen zwischen der arabischen und griechischen bzw. indischen Mathematik gegeben hat, stützt sich im wesentlichen auf die von Colebrooke und Rosen beigesteuerten Übersetzungen und auf die Vorarbeit Hankels; Rodets Untersuchungen sind nur bei der Besprechung der indischen Algebra einigemal zitiert. Das Verhältnis Muḥammad b. Mūsās zu seinen Quellen wird im ganzen zweifellos richtig dahin bestimmt, „daß als indisch vornehmlich die Rechenkunst, als griechisch dagegen, wenn auch nicht unter Ausschließung jeglicher aus Indien stammender Veränderung, die Algebra sowie die Geometrie, mit anderen Worten die eigentliche wissenschaftliche Mathematik sich erweist“. Auf das Urteil über die letzte Hälfte der Algebra, in der „in den Augen des Verfassers wohl der Schwerpunkt seiner Aufgabe liegen mochte“, ist schon oben hingewiesen worden. Die Messungen werden als griechisch, die „nur uneigentlich der Algebra zugeteilte Regel de tri, welche in der Fortsetzung von Alchwarizmîs Werke auftritt und ähnlich bei griechischen Schriftstellern uns nicht bekannt ist“, wird als indisch angesprochen. Mindestens die geometrischen Beweise für die Auflösung unrein quadratischer Gleichungen sind griechisch; wahrscheinlich hat die griechische Algebra von Euklid über Heron zu Diophant eine vollkommen selbständige Entwicklung erfahren; anderthalb Jahrhunderte nach Diophant erschienen griechische Gelehrte am persischen Hofe; von ihnen kann manches, was uns griechisch nur bei Diophant erhalten ist, mitgeführt worden sein; mag Alchwarizmî auch der erste arabische Schriftsteller über seinen Gegenstand gewesen sein, so hat er doch keinenfalls einen für seine Landsleute neuen Gegenstand behandelt, vielmehr mußte durch mündliche Lehre, entnommen aus persönlichen Übertragungen fremdländischen Wissens oder aus Schriften, die in nicht-arabischer Sprache verfaßt waren, schon bekannt gewesen sein, was Herstellung und was Gegenüberstellung sei. Griechische Elemente wiegen in der Algebra weitaus vor; der Name des Quadrats der Unbekannten kann keinesfalls aus dem indischen *varga*, wohl aber aus dem griechischen δύναμις abgeleitet werden, der Name „Wurzel“ für die Unbekannte könnte auf verschiedenen Umwegen aus ῥίζα entstanden sein, der Name *schai*, Sache, erinnert an das ägyptische *hau*, die Buchstabenfolge der Figuren ist griechisch. Wer den Satz schrieb, daß die Einheit Wurzel jeder Zahl und außerhalb der Zahl ist, mußte auch in der Zahlenlehre der Neupythagoräer wohl geschult sein und Kenntnisse in der spekulativen Arithmetik besitzen, die unmittelbar oder mittelbar auf Nikomachus und Theon von Smyrna zurückweisen. Die Einführung der Algebra muß aber schon hinlänglich lange Zeit vor Alchwarizmî stattgefunden haben, um die Möglichkeit zu gewähren, daß jene Begriffe und die für dieselben erfundenen Kunstausdrücke unter den *Fachleuten* — denn für solche schrieb *Alchwarizmî* — schon landläufig geworden sein konnten.

Nach Cantor ist noch S. Günthers Geschichte der Mathematik (I, Leipzig 1908) zu nennen; das Werk kann aber, soweit unsere Fragen in Betracht kommen, keinen Anspruch auf Selbständigkeit machen, und so sei nur das Urteil verzeichnet, daß *Muḥammad b. Mūsā* der erste „wirklich hervorragend produktive“ Mathematiker des Ostens war, und daß sein algebraischer Auflösungsmodus „original“ ist (a. a. O., S. 201, 204).

Die Übersicht zeigt, daß es kaum eine denkbare Lösung der Quellenfrage gibt, die nicht versucht worden wäre, und keine Ansicht, die nicht durch ein entgegengesetztes Urteil wieder aufgehoben würde. *Fortschritte in der Klärung der Streitpunkte werden nur möglich sein durch Zuziehung neuer handschriftlicher Quellen, durch Diskussion der äußeren Vorbedingungen für die Entstehung einer mathematischen Literatur bei den Arabern, durch wirkliches Eingehen auf die Absichten und Ziele des Autors und durch genauere Analyse der Terminologie.*

V. Zur Geschichte der arabischen Zahlbezeichnungen.

Es kann nicht oft und nachdrücklich genug gesagt werden, daß die Araber, die die persischen und römischen Provinzen überfluteten, weder Rechtswissenschaft noch Staatsverwaltung fertig mitbrachten, sondern gezwungen waren, die Verwaltungsmethoden und Rechtsformen der eroberten Länder im wesentlichen unverändert zu übernehmen. Daß es ihnen mit erstaunlicher Schnelligkeit gelang, sich in die größeren Verhältnisse hineinzufinden und nicht nur die staatlichen Einrichtungen, sondern auch alle andern Früchte einer alten, ausgereiften Kultur sich zu eigen zu machen, ist bekannt. Das wäre aber gewiß unmöglich gewesen, wenn der geistige Abstand zwischen dem Eroberervolk und den zeitgenössischen Persern, Griechen und Ägyptern so groß gewesen wäre, wie man bis in die neueste Zeit anzunehmen pflegte. Insbesondere darf man sich die städtischen Araber, die Träger der geistigen und politischen Bewegung, nicht als halbe Wilde vorstellen, die vor dem Auftreten Muhammeds jedem Kultureinflusse von seiten der Nachbarvölker unzugänglich gewesen wären (Cantor I^3, S. 693) oder gar in der Zeit, zu der sie für die Geschichte der Mathematik wichtig werden, kaum hätten schreiben können.

Woepcke durfte sich 1863 mit seinem Satze „lorsque les Arabes sortirent du désert..., ils possédaient à peine l'écriture“ noch auf Silvestre de Sacys Mémoire vom Jahre 1831 berufen[1], heute aber können Silvestre de Sacys Grammaire arabe von 1810 und die Abhandlungen von Gesenius in der Enzyklopädie von Ersch und Gruber aus dem Jahre 1820 nicht mehr als Quellen für unsere Kenntnis des arabischen Schriftwesens benützt werden (Cantor I^3, S. 707). Authentische Urkunden und Schriftdenkmäler, die bis in die erste Zeit des Islam zurückreichen, enthüllen die überraschende Tatsache, „daß die arabische Schrift schon damals eine Form besaß, die von der gewöhnlichen, später Neskhī نسخى genannten Schrift kaum verschieden ist, desto mehr aber von der eckig steifen «kufischen» Schrift, die man für die Mutter der Kursivschrift gehalten hatte“. Es steht jetzt fest, daß sich die arabische Schrift im 4. und 5. nachchristlichen Jahrhundert aus der nabatäischen Kursive entwickelt hat; aus ihrem Alphabet entstand durch Hinzufügung der arabischen Laute ث, خ, ذ, ض, ظ, غ das alte arabische Alphabet, dessen Buchstabenfolge in den diesen Zeichen erteilten Zahlwerten ث = 500, خ = 600, ذ = 700, ض = 800, ظ = 900, غ = 1000 erhalten geblieben ist.[2] Von ihrem Ursprungsort aus, der vielleicht in Petra, vielleicht in dem damals aufblühenden Ghassanidenreiche zu suchen ist, hat sich die Schrift mit dem Handelsverkehr nach Norden und Süden verbreitet. Sie war im 6. Jahrhundert wohl schon im ganzen nordarabischen Sprachgebiet bekannt und dürfte besonders in den beiden Städten, die den Ausgangspunkt der religiös-nationalen Bewegung bildeten, in Mekka und Medina, in Gebrauch gewesen sein.

Ganz unschätzbare Quellen für die Geschichte der Übertragung griechisch-ägyptischer Verwaltungs- und Rechenpraxis in die Sprache und Schrift der arabischen Herren stehen uns seit längerer Zeit in den *Papyri von el-Faijūm* und andern Fundorten (Sammlung Erzherzog Rainer), seit einigen Jahren in denen des *Aphroditofundes* zu Gebote. Eine auch dem Nichtarabisten zugängliche

[1] F. Woepcke, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens, Journ. As., 6. Sér., Bd. 1, S. 236.

[2] Vgl. die Abhandlung von B. Moritz in der Enzyklopädie des Islām, 7. Lief., 1910, S. 399 und die dazu gehörigen Schrifttafeln.

Übersicht über die Schätze der erstgenannten Sammlung enthält der „Führer durch die Ausstellung“ in seiner von J. von Karabacek bearbeiteten „Arabischen Abtheilung“ (Wien 1894); die wichtigsten arabisch-griechischen Urkunden des Aphroditofundes sind von C. H. Becker veröffentlicht und bearbeitet worden.[1] Sie vermitteln in ihrer Gesamtheit ein fast lückenloses Bild von der fortschreitenden Arabisierung des Schrift- und Rechnungswesens, zugleich auch den Beweis eines überraschend langen und zähen Festhaltens der Araber an den griechischen Zahlzeichen. Viele Urkunden von Behörden, selbst Erlasse arabischer Heerführer aus der Eroberungszeit sind nur griechisch geschrieben; man wird aber annehmen dürfen, daß die Eroberer auch ihrer eigenen Sprache sofort Geltung zu verschaffen wußten, und daß zweisprachige Erlasse wie jene „im 22. Jahre d. H. am 25. April 643 n. Chr. ausgefertigte ebenso prächtige, wie unschätzbare Urkunde des Unterfeldherrn ʿAbd allâh ibn Ǵâbir, die in der Papyrussammlung Erzherzog Rainer als das älteste Schriftdenkmal des Islâm bewahrt wird“[2], durchaus keine Ausnahme darstellen. Während sich die eingesessene Bauernbevölkerung noch der koptischen, die handel- und gewerbtreibende Bevölkerung der Städte und die Beamtenschaft vorwiegend der griechischen Sprache im Geschäftsverkehr bedienten, haben die im Lande heimisch gewordenen Araber ebenso selbstverständlich ihre Briefe und Mitteilungen arabisch geschrieben. Die obersten Regierungsbehörden konnten am frühesten daran denken, ihre amtlichen Verfügungen nur arabisch abzufassen; ihre Verbreitung in der fremdsprachigen Provinz konnte nach wie vor nur durch Ausfertigung zweisprachiger Urkunden oder durch Herstellung griechischer und koptischer Übersetzungen erfolgen. In dem oben erwähnten Erlasse steht das Arabische an zweiter Stelle, später ist das Umgekehrte häufiger; noch aus dem Jahre 80 d. H. ist ein rein griechischer Erlaß bekannt. In den zweisprachigen Urkunden aus der Zeit des Statthalters Qorra b. Šarīk (im Amte 90—96 d. H. = 708—714 n. Chr.), die C. H. Becker a. a. O. veröffentlicht hat, erscheinen die Zahlen des griechischen, an zweiter Stelle stehenden

---

[1] C. H. Becker, Veröffentlichungen aus der Heidelberger Papyrus-Sammlung III. 1, Papyri Schott-Reinhardt I, 1906. Derselbe, Neue arabische Papyri des Aphroditofundes, Der Islam, Bd. 2, 1911, S. 245.

[2] J. v. Karabacek, Zur orientalischen Altertumskunde, Sitzungsber. der ph.-hist. Kl. d. Kais. Ak. d. W., Bd. 161, 1909, S. 62. Der griechische Teil ist geschrieben von dem Notar und Diakon Johannes, der arabische von Ibn Ḥadīd.

Textes, der für die Empfänger jedenfalls der wichtigere war, stets zuerst „in Ziffern“, dann „in Worten“, die Jahreszahl in Ziffern; im arabischen Text sind alle Zahlenangaben in Worten ausgeschrieben. Ein Beispiel (C. H. Becker, Papyri Schott-Reinhardt, S. 82/83; vgl. die Abbildung der Urkunde auf Taf. VI) mag als Beleg dienen:

3 . . . . . انّه اصابكم من

4 جزية سنة ثمان وثمنين اربع مائة دينٰر واحد وستّين

5 ونصف دينٰر عددا ومن ضريبة الطعام مئتين إردبّ

6 قمح وسبعين إردبّا وثلث إردبّ ونصف ويبة

7 وكتب راشد فى صفر من سنة احدى وتسعين

---

9 . . . Ἔλαχεν ὑμῖν (ὑπὲρ) δημοσίω(ν) ἰνδ(ικτι)ό(νος) ς κ(α)τὰ Αρ(αβας)

10 ἔτου(ς) πη αρ(ί)ϑ(μια) ν(ομισμάτια) υξαϛ τετρακοσίω(ν) ἑξήκοντα ἓν ἥμισυ

11 (ὑπὲρ) ἐμβολῆ(ς) σί(του) ἀρτ(άβας) σο γʹ ιβʹ διακοσία(ς) ἑυδομήκοντα τρίτον

12 δωδέκατο[ν] [μόνα. Ἐ]γρά(φη) μη(νὸς) Θω(ϑ) ἰνδ(ικτι)ό(νος) ὀγδόης

13 . . . σίτου ἀρτ(ά)βας σο γʹ ιβʹ.

Arabischer Text:

3 „. . . . . Es hat euch getroffen von

4 der Geldsteuer des Jahres achtundachtzig* vierhunderteinundsechzig

5 und ein halber Dinar** gezählter Münze und von der Naturalauflage zweihundert

6 und siebzig Irdabb Weizen und ein Drittel Irdabb und ein halbes Waiba***

7 Und es hat (dies) geschrieben Rāšid im Ṣafar des Jahres einundneunzig.“

* griech. 88 ** griech. „461½, vierhundert, sechzig, eins, ein halb.“

*** griech. „Artaben Getreide 270 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{12}$ zweihundert, siebzig, ein drittel, ein zwölftel, je eines.“

Im Jahre 87 d. H. (706 n. Chr.) führte nach den Berichten der arabischen Historiker ʿAbdallāh, der Sohn des Kalifen ʿAbdalmelik, die arabische Verwaltung in Ägypten ein. Um dieselbe Zeit hatte der Kalif Alwalīd zu Damaskus den Gebrauch der griechischen Sprache bei der Führung der Steuerregister verboten, aber für die Zahlzeichen eine Ausnahme zulassen müssen, „parce qu'il était impossible d'écrire en arabe un, ou deux, ou trois, ou huit et demi, etc."[1] Daß die Neuerung der rein arabischen Verwaltung noch nicht durchführbar war, beweisen jetzt unsere Texte; vor allem aber wird die von Woepcke beigezogene Stelle durch die zahlreichen über das ganze achte und neunte Jahrhundert, in abnehmender Häufigkeit aber noch bis ins zehnte Jahrhundert reichenden, in einem Beispiel sogar vom Jahre 513 d. H., also 1120 n. Chr. datierten Urkunden belegt und bestätigt, die mitten im arabischen Text griechische Zahlzeichen enthalten und darum im „Führer" von Karabacek als „arabisch-griechisch" bezeichnet werden. Auch die koptischen Zahlzeichen, die nur eine leichte Modifikation der griechischen sind, mögen in Ägypten angewandt worden sein (Woepcke, a. a. O., S. 238), doch scheinen solche arabische Urkunden aus alter Zeit noch nicht bekannt zu sein. Besonders interessant ist in unserem Zusammenhange ein Palimpsest aus dem Anfang des 9. Jahrhunderts, der schon im 7. Jahrhundert, wie die alten Schriftzüge zeigen, von einem Araber benützt worden war, der sich in der Schreibung der griechischen Zahlbuchstaben übte. Er enthält in zwei Reihen die griechischen Zahlbuchstaben von α bis ι und über den beiden ersten die arabischen Zahlwörter (Führer N. 649).

Gegenüber diesen Urkunden treten solche mit arabischen Zahlbuchstaben ganz auffallend zurück. Eine Schreibvorlage aus dem 9. Jahrhundert, die die arabischen und griechischen Zahlbuchstaben in Gegenüberstellung enthält, zeigt die Übertragung und gleichzeitige Anwendung der Zeichen. Das älteste bisher bekannt gewordene urkundliche Beispiel ist eine doppelsprachige Steuerurkunde aus dem 8. Jahrhundert, die in dem an zweiter Stelle stehenden arabischen Text die Steuersumme auch in arabischen Zahlbuchstaben bietet (Führer N. 605). Das nächste, zugleich genau datierte Beispiel aus dem Jahre 851 ist eine Bilanz des Schatzhauses von el-Faijūm (Führer N. 761). Karabacek vermutet einen für die große Menge mehr sekreten Charakter dieser Rechnungsweise, zumal sie der Differenzierung der einzelnen Buchstabenwerte durch die diakritischen Punkte entbehre; ich sehe ein Hindernis ihrer Verbreitung im Rechnungswesen auch darin, daß sich diese Buchstabenzusammenstellungen nicht deutlich genug vom Worttext abhoben und leicht zu Verwechslungen und Fehlern Veranlassung geben konnten. Hatte man erst die Zahlen durch die arabischen Worte wiedergegeben, so konnte man die Zeichen auch weglassen,

[1] Woepcke, a. a. O., S. 237; nach Theophanis Chronographia, Paris 1655. Von Cantor I³, S. 709 wiederholt.

und so blieb in allen zusammenhängenden Texten, die nicht gerade tabellarische Zusammenstellungen oder sonst gehäufte Zahlen enthalten, bis heute die Wortschrift der Zahlen in Übung, die vom Standpunkt des Mathematikers ein Rückschritt sein mag, aber den Vorzug der größeren Sicherheit besitzt.[1] Wenn es richtig ist, daß die Benutzung der Buchstaben als Zahlzeichen auf Milet und das 8. Jahrh. v. Chr. zurückzuführen ist[2], so müssen die auf Anwendung des Alphabets gegründeten Zahlbezeichnungen der Hebräer und Syrer griechischem Vorbild nacherfunden worden sein. Das normale semitische Alphabet von 22 Buchstaben führte zunächst glatt durch Einer und Zehner. Dann waren noch 4 Zeichen übrig, die für die Zahlen 100 bis 400 verwendet werden konnten, aber es fragte sich, wie nun die übrigen 5 Hunderter darzustellen waren. Die ältere hebräische und die syrische Zahlenbezeichnung benützen den nächstliegenden Ausweg, indem sie die höheren Hunderter additiv aus Zeichen für die niederen bilden, also 500 = תק = 400 + 100 usw. bis 900 = תתק = 400 + 400 + 100 setzen. Das gleiche Verfahren ist nach S. de Sacy auch in arabischen Handschriften zu finden. Interessanter ist ein zweites syrisches Verfahren, das für die Hunderter einfach die Zehnerbuchstaben unter Hinzufügung eines diakritischen Punktes einsetzt, denn damit wird die Zahl der Zifferbuchstaben auf zwei Enneaden reduziert. Es ist von hier aus verständlich, wie arabische Schriftsteller — ich erwähne neben An-nadīm, dem Verfasser des Fihrist, auf den kürzlich L. C. Karpinski wieder aufmerksam machte[3], noch die in meinen Ḳazwīnīstudien behandelte Handschrift[4] — die indischen Ziffern für neun Grundzeichen halten konnten, die durch Hinzufügung eines bzw. zweier diakritischen Punkte die Zahlenwerte der Buchstabengruppen ى bis ص und ق bis ظ wiedergeben. Hier sind die punktförmigen Nullen der Zehner

[1] Aus Abkürzungen der Wortschrift sind die Dīwānī- oder Kanzleizahlen hervorgegangen, die S. de Sacy auf Tab. VIII seiner Grammaire arabe abgebildet hat; auch die kaufmännischen Zahlen, die W. St. Clair-Tisdall unter dem Namen *Siyāq* Method of Reckoning in seiner Modern Persian Conversation-Grammar (Heidelberg 1902) S. 220 abbildet, sind nichts anderes als stark verkürzte Wortschrift.

[2] W. Larfeld, Handbuch der griech. Epigraphik, Bd. I, 1907, S. 419 ff.

[3] L. C. Karpinski, Hindu numerals in the Fihrist, Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 11, 1910/11, S. 121, mit einer verkleinerten Reproduktion der Zeichen nach dem Fihrist, S. 120.

[4] J. Ruska, Ḳazwīnīstudien, Der Islam, Bd. 4, 1913, S. 258.

und Hunderter und die von 1000 einfach als diakritische Punkte genommen (Fihrist S. 18/19):

وذكر هذا الرجل المقدّم ذكره انّهم فى الاكثر يكتبون بالتسعة الاحرف
على هذا المثال ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ فاذا بلغ الى ط اعاد الحرف الاوّل
ونقّطه تحته على هذا المثال ١̣ ٢̣ ٣̣ ٤̣ ٥̣ ٦̣ ٧̣ ٨̣ ٩̣[1] فيكون ى ك ل م ن
س ع ف ص يزاد عشرة عشرة فاذا بلغ الى صاد يكتب على هذا المثال
وينقط تحت كل حرف نقطتين هكذا ١̤ ٢̤ ٣̤ ٤̤ ٥̤ ٦̤ ٧̤ ٨̤ ٩̤ فيكون
ق ر ش ط ث خ ذ (ض) ظ[1] فاذا بلغ ظ كتب الحرف الاوّل من الاصل
وهو هذا آ (lies ١) ونقط تحته ثلث نقط هكذا (ergänze ١) فيكون
قد اتى على جميع حروف المعجم ويكتب ما شاء ۞

Ich füge wieder die wörtliche Übersetzung bei, da die von L. C. Karpinski mitgeteilte, von Dr. A. Yohannan herrührende „freie" Übersetzung wie alle sogenannten freien Übersetzungen für kritische geschichtliche Untersuchungen nicht zu gebrauchen ist.

„Und es erwähnte dieser Mann, dessen Erwähnung vorausgeschickt wurde, daß sie meistens mit den neun Schriftzeichen schreiben, gemäß diesen Beispielen: 1 2 3 4 5 6 7 8 9; wenn er dann bis zum ṭ gelangt ist, wiederholt er das erste Zeichen und versieht es mit einem Punkt darunter gemäß diesen Beispielen: 1̣ 2̣ 3̣ 4̣ 5̣ 6̣ 7̣ 8̣ 9̣, so daß es j k l m n s ʿ f ṣ wird, indem es von zehn zu zehn vermehrt wird; wenn er dann zum ṣ gelangt ist, schreibt er gemäß diesen Beispielen und setzt unter jedes Zeichen zwei Punkte wie folgt: 1̤ 2̤ 3̤ 4̤ 5̤ 6̤ 7̤ 8̤ 9̤, so daß es ḳ r š t ṯ ḫ ḏ ḍ ẓ wird; und wenn er dann das ẓ erreicht hat, schreibt er das erste Zeichen von Anfang an, nämlich dieses: 1, und setzt darunter drei Punkte wie folgt: 1, und es geschieht so, daß er zur Gesamtheit der Zeichen des (arabischen) Alphabets kommt und schreibt, was er will."

Die beiden Textänderungen zu آ ergeben sich von selbst aus dem Zusammenhang. Daß „these subscript dots are used here only as we use Roman numerals" (Karpinski S. 123, Z. 3 v. u.), ist eine unhaltbare Annahme; in der zweiten Buchstabenreihe ist nicht „ص or غ omitted", wie genau nach Flügel (Kitâb al-Fihrist II, S. 10 zu I, S. 19) bemerkt ist, sondern zweifellos nur ض; die letzte

[1] Die im Ms. stellenweise fehlenden Punkte und die Ziffer 8 bzw. ض der zweiten Reihe sind sinngemäß ergänzt.

Buchstabenreihe ist nicht die der „Persian letters" — das Wort *muʿǵam* bezeichnet das ganze arabische Alphabet — und stellt nicht „the higher hundreds and 1000", sondern alle Hunderter ohne Tausend dar. Der Verfasser vergißt im folgenden Satz den Zahlbuchstaben غ ausdrücklich zu erwähnen, wie er ja auch das Fortschreiten von 100 zu 100 nicht mehr besonders hervorhebt.

Die Echtheit der Fihriststelle anzuzweifeln (Eneström in Jahrb. über d. Fortschr. d. M., Bd. 41, 1910, S. 53), liegt durchaus kein Grund vor; sie bezieht sich ohne Frage auf die indischen Zahlzeichen — diese sind für den Araber ebensogut „Schriftzeichen" wie sein eigenes Alphabet — und findet ihr Analogon in andern arabischen Abhandlungen über die Schriften der Völker.[1]

Die den Ġobärziffern bei de Sacy (Gramm. arabe I, Tab. VIII) zur Bezeichnung der Zehner und Hunderter übergesetzten Punkte sind natürlich auch nichts anderes als Nullen; man gewinnt aber aus der Anordnung der 3 Punkte für die Zahl 1000 (١) den Eindruck, daß der Ursprung der Punkte in der von de Sacy benutzten Quelle vollständig vergessen ist oder wenigstens dem Abschreiber unbekannt war. Karpinski erwähnt übergesetzte Punkte nach Ibn Waḥšija (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 13, 1913, S. 98).

Eine Auffüllung der dritten Enneade bewirkt die spätere hebräische Zahlschreibung — nun vielleicht nach Analogie der arabischen — durch Hinzufügung der Finalbuchstaben, die arabische

[1] Der Text ließe am Schluß auch die Deutung zu, daß der Inder mit Hilfe seiner mit diakritischen Punkten ausgestatteten 9 Zeichen alle Buchstaben des arabischen Alphabets schreiben kann. Ohne Zweifel besaßen manche Araber, die in fremde Länder kamen, auch Kenntnis fremder Schrift und Sprache. Man muß sich aber hüten, aus dem Interesse einzelner Autoren und ihren vorhandenen positiven Kenntnissen auf eine allgemeine Verbreitung dieses Wissens zu schließen. Was jene etwa beibrachten, ist sehr bald in den Händen unwissender Abschreiber zur vollständigen Unkenntlichkeit entstellt worden. Dies sieht man ebenso aus den im Fihrist S. 13 bis 20 mitgeteilten Schriftproben wie aus denen des Berliner Cod. Pertsch 345 (Ḳazwînî-studien S. 17, 257). Am häufigsten scheint noch eine gewisse Kenntnis der hebräischen Schrift vorzukommen; was sonst als fremde Schrift ausgegeben wird, ist meist nichts als ein Gemenge arabischer Schriftzeichen und Ligaturen mit indischen Ziffern oder ganz sinnlosen Schnörkeln. Was die Handschriften bieten, ist typographisch nachgebildet in der Bombayer Ausgabe der Iḫwān aṣ-ṣafā I S. 110; wie weit der Unsinn getrieben wird, zeigt eine Angabe über die persische Schrift, wonach die neun Zeichen يك دو سه چهار پنج شش هفت هشت نه, das sind die ausgeschriebenen persischen Zahlwörter von 1 bis 9, persische Buchstaben sein sollen!

durch die sechs dem gemeinsemitischen Alphabet zugefügten neuen Buchstaben ث خ ذ ض ظ غ[1]. Daß diese arabische Schreibung nicht erst im 5. Jahrhundert der Hiğra aufkam, wie DE SACY (Gr. arabe, I, S. 74, Note 6) vermutet, beweisen sowohl die von KARABACEK veröffentlichten Proben — nach dem Führer S. 201 kommt schon im Jahre 851 ط (für ظ) mit dem Zahlwert 900 vor — wie die aus dem 10. Jahrhundert stammenden Schriften der Iḫwān aṣ-ṣafā. Wo und wielange neben dieser spezifisch arabischen noch die von DE SACY a. a. O. S. 74 erwähnte gemeinsemitische Bezeichnung bestanden hat, müßte genau untersucht werden.

Durch den überschießenden sechsten Buchstaben gewinnt die arabische Zahlenschrift die Möglichkeit, die Tausender und alle Potenzen von Tausend in beliebiger Höhe ohne Accente und andere Hilfszeichen bequem darzustellen. Eine Tabelle dieser Art findet sich in der Bombayer Ausgabe der Schriften der Iḫwān aṣ-ṣafā, Bd. I, S. 25; in vereinfachter Form zeigt die nachstehende Übersicht den von ihr dargestellten Zahlenraum:

1 ا	10 ى	100 ق	1000 غ	10000 يغ	100000 قغ
2 ب	20 ك	200 ر	2000 بغ	20000 كغ	200000 رغ
3 ج	30 ل	300 ش	3000 جغ	30000 لغ	300000 شغ
4 د	40 م	400 ت	4000 دغ	40000 مغ	400000 تغ
5 ه	50 ن	500 ث	5000 هغ	50000 نغ	500000 ثغ
6 و	60 س	600 خ	6000 وغ	60000 سغ	600000 خغ
7 ز	70 ع	700 ذ	7000 زغ	70000 عغ	700000 ذغ
8 ح	80 ف	800 ض	8000 حغ	80000 فغ	800000 ضغ
9 ط	90 ص	900 ظ	9000 طغ	90000 صغ	900000 ظغ

Die Schreibung beliebig großer Zahlen vollzieht sich nach diesem Schema ohne alle Schwierigkeit; die Wiederholung des Zeichens غ liefert die Million غغ und die höheren Potenzen von 1000, wie durch die Wiederholung von Mu bei den Griechen die Potenzen von 10000 dargestellt werden[2].

[1] Das ث ist aus dem ت wie die vorhergehenden Zeichen durch Zusetzung eines oberen Punktes entstanden.

[2] Was über die Schreibung großer Zahlen bei den Syrern in A. TH. HOFMANNS Grammatica Syriaca vom Jahre 1827, S. 82, in der Bearbeitung von A. MERX 1867, S. 15/16 mitgeteilt ist (vgl. auch R. DUVAL, Traité de gramm. syr., 1881, S. 15/16), macht den Eindruck gelehrter Erfindung der Grammatiker und ist kaum irgendwo wirklich angewandt worden.

Nur von den indischen Ziffern aus konnte man auf die von Alberūnī (973—1048) in seiner Chronologie und in Anlehnung an ihn von Alḫāzinī (gest. um 1130) in seiner „Wage der Weisheit" mitgeteilte Methode[1] verfallen, die arabischen Zahlbuchstaben zur Sicherung großer, mit Ziffern geschriebener Zahlen derart zu verwenden, daß z. B. 37045 durch جع د ه oder 50086 durch وح ث dargestellt wurde. Ich weiß nicht, ob davon häufiger Gebrauch gemacht wurde, oder ob das an der Schachbrettaufgabe entwickelte Beispiel nur einen Einfall Alberūnīs bedeutet.

Die hebräischen Zahlbuchstaben א bis ט an Stelle der Ziffern und einen Kreis für die Null benützt Abraham ibn Ezra (1092—1167) in seinem Rechenbuch[2]. Byzantinische Beispiele einer Verwendung der griechischen Buchstaben α bis ϑ mit einem besonderen Zeichen ϥ für Null und von Ziffern mit punktförmigen Nullen hat J. L. HEIBERG in der Festschrift für CANTOR (Abhandlungen zur Gesch. d. Math., 9. Heft, 1899, S. 165 und S. 173 oben; vgl. noch S. 174) mitgeteilt. Sie gehören Handschriften des 15. Jahrhunderts an[3] und verraten in vielen Teilen nach Anordnung und Stoff arabische Quelle. So fehlt auch nicht der διπλασιασμὸς τοῦ ζατρικίου (= *šaṭranğ*) mit der falschen Zahl

ϑ γ η ζ β α β ϥ γ ς η ε δ ζ ζ ε η ϥ η, also
9. 3 8 7. 2 1 2. 0 3 6. 8 5 4. 7 7 5. 8 0 8, die
9. 2 2 3. 3 7 2. 0 3 6. 8 5 4. 7 7 5. 8 0 8 heißen müßte;

die indischen Ziffern heißen ἀριθμοὶ Περσικοί, die Regel de tri wird ὁ τῆς λογιστικῆς μάντις genannt.

Für die Geschichte der Ausbreitung der indischen Ziffern nach dem Westen ist es notwendig, literarische Nachrichten über das System der neun Zeichen und urkundliche oder literarische Beweise für ihren tatsächlichen Gebrauch in Wissenschaft oder Praxis streng auseinanderzuhalten. Was über die Neupythagoreer in älterer und neuerer Zeit behauptet oder vermutungsweise ausgesprochen worden ist, muß hier ebenso aus dem Spiel bleiben wie der gefälschte Boetius. Die älteste einwandfreie Nachricht über das indische Rechnen hat F. NAU in einer Schrift des Syrers Severus Sabokht aus dem Jahre 662 entdeckt (Journ. As., 10. Série, Bd. 16,

[1] Vgl. E. WIEDEMANN, Beiträge zur Gesch. d. Naturw. XIV, in Sitzungsber. d. Phys.-med. Sozietät in Erlangen, Bd. 40, 1908, S. 19, Note [3] und S. 50.

[2] M. SILBERBERG, Sefer ha-Mispar, Das Buch der Zahl, ein hebräisch-arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Esra, 1895, S. 2 und 95.

[3] Etwas älter ist Maximus Planudes, vgl. CANTOR I[3], S. 510.

1910, S. 225). Der Verfasser[1] wendet sich darin gegen die Anmaßung der Griechen, die behaupteten, alle Wissenschaft erfunden zu haben, und führt neben Babyloniern und Syrern, d. h. Assyrern, als Begründern der Astronomie auch die Inder als Astronomen und Mathematiker an, indem er u. a. sagt: „Ich will nicht sprechen von der geschickten Art ihres Rechnens und ihrem Rechenverfahren, das alle Beschreibung übersteigt, nämlich dem mit neun Zeichen . . .“. Aus dem Wortlaut des Textes könnte man den Schluß ziehen, daß damals die Null noch nicht erfunden gewesen sei; dies wäre aber insofern voreilig, als auch in weit späteren Schriften nur von den „neun Zeichen“ und dem besonderen Zeichen für das Leerbleiben von Stellen die Rede ist.[2] Die älteste urkundlich auf indischem Boden nachgewiesene Null datiert aus dem Jahre 738 (Cantor I³, S. 603, nach E. Clive Bayley, Journ. R. As. Soc., New Ser., Bd. XV, 1883, S. 27); die älteste arabische Null, in arabischen Urkunden das älteste Beispiel der indischen Ziffern überhaupt, findet sich in der Jahrzahl 260 einer Papyrusurkunde (Führer N. 798, S. 216/7; entspricht dem Jahre 873/4 n. Chr.). Dazwischen liegt das Buch de numero Indorum des Muḥammad b. Mūsā, das die Null als einen *circulum parvulum* (mit dem vom Übersetzer oder Bearbeiter der Schrift herrührenden Zusatz *in similitudine* .o. *literae*)

[1] Karpinski gibt in seinem Aufsatz Hindu numerals among the Arabs (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 11, 1910/11, S. 98) irrtümlich die Zahl 622 A. D. an. Severus Sabokht ist auch nicht „ein gewisser S. S.“, sondern eine Größe der syrischen Literatur, wie Nau selbst noch in der genannten Abhandlung andeutet: „homme de grande valeur qui a influé beaucoup sur la littérature syriaque — il a été évèque de son monastère, il en a fait un centre d'études grecques... Nous pouvons être certains que la connaissance des chiffres indiens, constatée en 662 au bord de l'Euphrate (d. i. am oberen Euphrat im Kloster Qennešrīn bei Nisibis) chez Sévère, a été transmise par lui à des nombreux disciples“. Weniger kann ich mich mit der Folgerung Naus einverstanden erklären, daß es die Syrer gewesen seien, die die indischen Ziffern den Arabern und den modernen Griechen vermittelten. Es fehlt doch jede Spur eines Zusammenhangs zwischen dem Kloster des Severus und dem Hofe Alma'mūns, und Severus Sabokht selbst ist mit seinen mathematischen Interessen eine ganz vereinzelte Erscheinung bei den Syrern (vgl. J. Ruska, Studien zu Severus bar Šakkū's Buch der Dialoge, Zeitschr. f. Assyriol., Bd. 12, 1896, S. 10).

[2] Vgl. z. B. die von E. Wiedemann übersetzte Stelle aus Ja'kūbī, in den Sitzungsber. d. Phys.-med. Sozietät Erlangen, Bd. 40, 1908, S. 38. Die Unterscheidung zwischen der Null und den Ziffern hat sich bei uns bis ins 16. Jahrhundert erhalten (Fr. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik, Leipzig 1888, S. 70).

beschreibt. Man wird also annehmen dürfen, daß das indische Ziffer- und Rechensystem, wenn es bei den Arabern am Anfang des 9. Jahrhunderts wissenschaftlich gelehrt wurde, im Laufe dieses und der folgenden Jahrhunderte in der islamischen Welt sich auszubreiten begann. Wenn es die griechischen und arabischen Zahlbezeichnungen nur langsam verdrängte, da selbst Astronomen und Geographen für ihre Tafeln an den gewohnten Zeichen festhielten, so steht dem genau die gleiche Erscheinung im Abendland gegenüber. Die ältesten dokumentarischen Spuren der Ziffern reichen hier bis ins 10. Jahrh.[1] Ungeachtet der Bemühungen des Pisaners Leonardo (Liber abbaci 1202) und anderer Meister bediente man sich aber in Wissenschaft und Praxis noch Jahrhunderte lang der römischen Zahlzeichen, so daß diese in Deutschland um 1500 geradezu „deutsche Zahlen“ im Gegensatz zu den „Ziffern“ heißen.[2]

VI. Über die Erbteilungsaufgaben in der Algebra des Muḥammad b. Mūsā und die ursprüngliche Anwendung der Termini *māl* und *schai'*.

Als weitere Quellen für die Geschichte des Rechnens und der Algebra kommen die arabischen Abhandlungen über Erbteilung in Betracht. Bisher ist von ihnen in der Geschichte der Mathematik noch nirgends Gebrauch gemacht worden, obgleich sich vom Erstling dieser Verbindung von Mathematik und Rechtswissenschaft, der uns in Muḥammad b. Mūsās „Algebra“ vorliegt, durch Jahrhunderte hindurch eine gewohnheitsmäßige und sachlich begründete Vereinigung von Rechenkunst und Erbteilungswissenschaft verfolgen läßt. Ich erinnere an den 895 gestorbenen Historiker, Astronomen und Mathematiker al-Dīnawarī, der das ganze von Muḥammad b. Mūsā behandelte Gebiet in besonderen Schriften darstellte[3], an den Ḳāḍī 'Abd al-Ḥamīd aus Baṣra, „sehr gelehrt in Rechenkunst, Algebra, Ausmessungslehre und Erbteilung“[4], sodann an Abū

[1] Hierzu sind die Nachweise in Smith und Karpinski, The Hindu-Arabic Numerals, Boston and London 1911, S. 137 ff. zu vergleichen.

[2] Fr. Unger, a. a. O., S. 14.

[3] Der Fihrist erwähnt von ihm S. 78 ein Buch über *ḥiṣāb alhind*, ein Buch *alǵam' waltafrīḳ*, ein Buch *alǵabr walmuḳābalah*, ein Buch *nawādir alǵabr*, ein Buch *alwaṣājā* und ein Buch *ḥisāb aldaur*. Vgl. Suter, Die Math. und Astr. d. Araber, S. 31, N. 60. Al-Dīnawarī starb 895.

[4] Suter, a. a. O., S. 38, N. 72.

Kāmil Šuǵā' b. Aslam[1], ferner an die zahlreichen von Ibn al-Faraḍī (Bibl. arabico-hisp., Bd. VIII) erwähnten Kenner der Erbteilung und Rechenkunst[2], an den Rechner al-Miṣṣīṣī[3], an Sinān b. al-Fatḥ[4], an 'Abd al-Kāhir b. Ṭāhir aus Bagdad[5], an al-Wannī und seinen Schüler 'Abdallāh b. Ibrāhīm al-Ḫabrī[6] und, um noch einen Mathematiker der Spätzeit zu nennen, an al-Kalaṣādī, der außer einer Reihe von Schriften über Arithmetik und Algebra auch ein Werk über das Ganze der Erbteilung verfaßte[7]. Man wird gewiß keine bedeutenden mathematischen Sätze in diesen Schriften entdecken, aber man wird auf alle Fälle den Wurzeln der Rechenkunst der Araber und den praktischen Grundlagen ihres Interesses an der Mathematik näher kommen, wenn man dem bürgerlichen Rechnen mehr Aufmerksamkeit schenkt. Die Bedürfnisse des Lebens in Handel und Verkehr, beim Kauf und Verkauf von Waren aller Art, von Häusern und Grundstücken, Tieren und Sklaven, beim bankmäßigen Geldverkehr, bei der Vollstreckung von Testamenten und der Verteilung von Hinterlassenschaften, bei der Erhebung von Zöllen, Ertrags- und Vermögenssteuern usw. mußten unter allen Umständen rechnungsmäßig behandelt werden und wurden auf Grund von Geldwert, Maß und Gewicht nach praktischen Regeln erledigt. Von diesen Aufgaben und Erfordernissen muß man überall ausgehen, wenn man den natürlichen Entwicklungsgang der Rechenkunst beschreiben und nicht ein zu schattenhaftes Bild von der Entstehung mathematischer Methoden und Aufgaben geben will.

---

[1] Suter S. 43, N. 81. Nach Hāǵǵī Ḫalīfa schrieb Abū Kāmil ein Werk *alwaṣājā bilǵabr walmukābalah*.

[2] Suter N. 61. 84. 86. 87. 91. 92. 100. 101. 106. 121. 128. 134 usw.

[3] Suter S. 66, N. 145; *kitāb alwaṣājā* und *kitāb ḥisāb aldaur*; Fihr. 281.

[4] Suter S. 66, N. 149; *kitāb alwaṣājā*.

[5] Suter S. 90, N. 199. Er war nach Ibn Ḫallikān I, 298 in der Arithmetik und Erbteilung sehr bewandert und schrieb über letztere — nicht über die Arithmetik, wie bei Suter vermerkt ist — mehrere Werke, worunter eins den Titel *kitāb altakmilah* führt, also wohl eine Weiterführung des entsprechenden Kapitels bei Muḥammad b. Mūsā darstellt.

[6] Suter S. 103, N. 229 und S. 108, N. 250. Das Hauptwerk des um 1083 gestorbenen al-Ḫabrī, das *Kitāb altalḫīṣ fī 'ilm alfarā'iḍ*, befindet sich im Besitz der Königl. Bibliothek zu Berlin. Es wäre in erster Linie einer Untersuchung wert, da es zahlreiche mathematische Kapitel enthält. (Vgl. W. Ahlwardt, Verzeichn. d. arab. Hss., IV. Bd., S. 186 ff.)

[7] Suter S. 180, N. 444; der Titel des Werkes S. 182.

Wenn die Erbteilungsrechnungen wirklich durch und durch arabisch wären und ganz und gar auf dem Koran beruhten, so müßte man den Gang der Entwicklung von den zu Muḥammad b. Mūsās Zeit begründeten Rechtsschulen (Abū Ḥanīfah starb im Jahr 767, Mālik b. Anas um 795, Muḥammad al-Šāfi'ī um 820, Aḥmad b. Ḥanbal 855) zu den Aufgaben der Algebra verfolgen können. In Wahrheit liefert das Erbrecht nur den Rohstoff für die Aufgaben, und ob die Technik der Rechnung arabisch ist oder nicht, muß erst untersucht werden. Wenn wir uns erinnern, daß auch die römischen Juristen schon ihre Freude an verzwickten Erbfällen hatten und sie durch praktische Rechenkunst oder salomonische Weisheit zu entscheiden suchten (Cantor I[3], S. 561), so werden uns berechtigte Zweifel an der Originalität der arabischen Behandlung der Aufgaben aufsteigen, und wenn wir finden, daß es sich vielfach um Auflösungen von Gleichungen ersten Grades mit Hilfe von Ausgleichung und Ergänzung handelt, so können wir jetzt ohne Zaudern griechische Vorbilder annehmen.

Man wird nicht daran zweifeln können, daß in den Kreisen der Steuerbeamten, der Notare, der Vermessungsbeamten, der Kaufleute und Bankiers für alle in den regelrechten Geschäftsgang einschlagenden Aufgaben eine feste Überlieferung bestand, die den Anwärtern und Schreibern ebenso beigebracht wurde, wie es heutzutage in den Amtsstuben und Kontoren geschieht. Aus diesen Kreisen mögen die ersten Anregungen zur Aufzeichnung und Ausarbeitung von Musterbeispielen gekommen sein, und nichts anderes als eine solche Sammlung von Vorschriften und Beispielen für den allgemeinen Gebrauch, mit genauer Anweisung für die Durchführung der Rechnungen, will Muḥammad b. Mūsās Buch vorstellen. Das Fehlen wirklich aus dem Leben gegriffener Aufgaben im ersten Teil der Algebra, also im Bereich der quadratischen Gleichungen, die Armseligkeit der Beispiele in dem Kapitel von den Geschäften, der schematische Charakter vieler Beispiele in andern Teilen des Buches deutet auf den Mangel einer durchgebildeten Übungs- und Schulliteratur, wie wir sie heute in den Werken und Aufgabensammlungen über kaufmännische Arithmetik, über die Regeldetri u. dergl. besitzen; die quadratischen Gleichungen, die bisher als Hauptstück und Hauptzweck der „Algebra" galten, erscheinen jetzt mehr als prunkvolle Fassade und gelehrte Zutat, oder wenn man will auch als Beginn des Übergangs zu den rein wissenschaftlichen, spekulativen Fragen und Interessen der Mathematik.

Ist die hier vorgetragene Auffassung richtig, so müssen wir auch von dem gemeinen Sprachgebrauch und den praktischen Aufgaben, also von den Aufgaben ersten Grades, nicht von den quadratischen Gleichungen aus zum Verständnis der Terminologie vorzudringen suchen. Es ist dann klar, daß der in allen Aufgaben wiederkehrende, grundlegende Begriff kein anderer sein kann als der einer Geldsumme, eines Vermögens, sei es bekannt oder unbekannt, Kapital, Erbmasse oder Wert einer Ware. Alles dies und noch mehr wird durch das Wort مال *māl* bezeichnet. Im Koran, den wir als älteste Quelle anführen, finden wir das Wort *māl* und den Plural *amwāl* in der Bedeutung Vermögen, Besitz, Geld und Gut, Reichtum, häufig auch in der Verbindung „Güter und Kinder" اموال واولاد oder „mit ihrem Gut und Blut" باموالهم وبانفسهم; es ist vom Aufzehren des Gutes der Waisen, vom Ausgeben der Reichtümer auf dem Wege Gottes die Rede, „Kapitalien" heißen روؤس الاموال d. i. capita bonorum, und „er häuft Gut auf" جمع مالا *ǵamaʿa mālan* (Sure CIV, 2). In den Aphroditopapyri kann man مال mit Geld oder Steuerertrag, Steuersumme übersetzen (عاجل عاجل بما اجتمع من المال: hurtig, hurtig mit dem, was von der Steuer zusammenkommt), gutes, d. h. vollwertiges Geld ist مال طيب *māl ṭajjib*, das Schatzhaus heißt بيت المال *bait almāl*, das Einsammeln der Steuerbeträge جمع المال *ǵamʿ almāl.*

In seiner ganz allgemeinen Bedeutung, als vorhandenes oder angenommenes Vermögen, wird das Wort in den Erbteilungsaufgaben gebraucht. Zwei Beispiele mit wortgetreuer Übersetzung mögen zugleich die Art der Aufgaben erläutern:

فان قال امراة هلكت وتركت زوجها وابنها وثلث (Rosen S. 67/68)
بنات واوصت لرجل بثمن مالها وسبعه فاقم سهام الفريضة فتاخذها من
عشرين فخذ مالا فالق ثمنه وسبعه فيبقى مال الا ثمنا وسبعا فتمم مالك
وهو ان تزيد عليه خمسة عشر جزءا من احد واربعين جزءا فاضرب
سهام الفريضة وهى عشرون فى احد واربعين فيكون ثمانى مائة وعشرين
فتزيد على ذلك خمسة عشر جزءا من احد واربعين وهو ثلثمائة جزء
فيصير ذلك كله الفا ومائة وعشرين سهما للموصى له من ذلك بالثمن
والسبع سبع ذلك وثمنه وهو ثلثمائة السبع مائة وستون والثمن مائة واربعون
فيبقى ثمانى مائة وعشرون سهما بين الورثة على سهامهم ۞

Nach Rosen S. 89/90: *If the instance be:* „A woman dies, leaving her husband, *a* son, and three daughters, and bequeathing *to a stranger* one-eighth and one-seventh of her capital"; then you constitute the shares of the *heirs*, by taking them out of twenty. Take a capital, and subtract from it one-eighth and one-seventh *of the same.* The remainder is, a capital less one-eighth and one-seventh. *Complete* your capital by adding to that which you have already, fifteen forty-one parts. Multiply the parts of the *capital*, which are twenty, by forty-one; the product is eight hundred and twenty. Add to it fifteen fourty-one parts of the same, which are three hundred: the sum is one thousand one hundred and twenty *parts.* The person to whom one-eighth and one-seventh were bequeathed, receives one-eighth and one-seventh of this. One seventh of it is one hundred and sixty, and one-eighth one hundred and forty. Subtracting this, there remain eight hundred and twenty *parts* for the heirs, proportionably to their legal shares.

In wörtlicher Übertragung nach dem Arabischen: „Und wenn er (oder jemand, erg. قائل) sagt: Eine Frau starb und hinterließ ihren Gatten und ihren Sohn und drei Töchter und vermachte einem Manne ein Achtel ihres Vermögens und sein Siebentel; so stelle die Anteile der (gesetzlichen) Erbschaft auf, indem du sie von zwanzig nimmst. Nimm also ein Vermögen und wirf weg sein Achtel und Siebentel, so bleibt ein Vermögen weniger ein Achtel und ein Siebentel. Vervollständige nun (فتمم) dein Vermögen, und das ist (oder besteht darin), daß du zu ihm hinzufügst fünfzehn Teile von einundvierzig Teilen; schlag dann (d. i. multipliziere) die Anteile der Erbschaft, nämlich zwanzig, in einundvierzig, so wird das achthundert und zwanzig; füge dann diesem hinzu fünfzehn Teile von einundvierzig, und das sind dreihundert Teile, so gibt dies alles tausend und hundert und zwanzig Anteile; für den, dem davon das Achtel und das Siebentel vermacht wurde, ein Siebentel davon und sein Achtel, und das ist dreihundert, das Siebentel hundert und sechzig und das Achtel hundert und vierzig; somit bleiben achthundert und zwanzig Anteile zwischen den Erben gemäß ihren Anteilen."

Einige der auffallenderen Abweichungen der Rosenschen Übersetzung sind durch Kursivdruck hervorgehoben; sie bestätigen die Beobachtung, daß die Wiedergabe der Kunstausdrücke unzuverlässig ist. Das ändert nicht immer viel am Sinn, macht aber eine

Wiederherstellung der Ausdrücke aus der Übersetzung unmöglich und alle darauf gebauten Schlüsse unsicher.

Muḥammad b. Mūsā sagt seinen Lesern nicht, wie er zu den zwanzig Anteilen für die Erben kommt. Sie wissen als Muslime, daß dem Koran gemäß (Sure IV, 13) der Gatte nach Abzug der Legate auf ein Viertel des Nachlasses Anspruch hat, wenn Kinder miterben, und daß ein Knabe doppeltsoviel vom Rest erhält als ein Mädchen (Sure IV, 12); auch ist für das Legat die Vorschrift eingehalten, daß der Erblasser höchstens über ein Drittel seines reinen Vermögens frei verfügen darf.[1] Die Töchter erhalten also je $\frac{1}{5}$, der Sohn $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ des Vermögens, d. i. $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{6}{20}$, der Vater $\frac{5}{20}$ von dem, was nach Abzug des Legates noch übrig bleibt. Um ganz klar zu sein, hätte Muḥammad b. Mūsā weiter hinzufügen müssen, daß $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{7}$ zusammen $\frac{15}{56}$ des Vermögens sind, daß man also für die gesetzlichen Erben 41 von 56 Teilen übrig behält und darum $\frac{15}{41}$ des Restes zu diesem hinzufügen muß, um das vollständige Vermögen zu erhalten. Damit er ganze Zahlen erhält, multipliziert er 20 mit 41 und gewinnt so die Zahl 820. Diese 820 sind um 15 weitere Teile, d. h. um $15 \cdot 20 = 300$ zu vermehren. Die Schlußrechnung können wir dann in Form einer „Abrechnung mit den Erben“ wie folgt darstellen:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 41 \cdot 20 + 15 \cdot 20 & = & 1120 \\
 & 1120 : 7 & = & 160 \\
 & 1120 : 8 & = & 140 \\
\hline
\text{Für das Legat} & 300 & = & 300 \\
\hline
\text{Bleiben für die Erben} & & & 820.
\end{array}
$$

Es ist wohl möglich, daß wir in diesem Verfahren ein Beispiel der älteren Technik vor uns haben, und daß die Aufgabe mit ihren einfachen Bedingungen zu dem Bestand von Musterbeispielen gehört, die schon vor Einführung der Gleichungen bei den Erbrichtern und Notaren zur Einübung der Teilungsregeln gehörten. Eine Stufe weiter führt ein Beispiel, das ich nach dem Text S. 86 mit Anwendung von Ziffern und von Abkürzungen für die Worte Vermögen, Dirhem und Anteil — dieser heißt hier نصيب *naṣīb* statt سهم *sahm*, ein Fingerzeig dafür, daß die Aufgabe einer andern Quelle entstammt — genau wiedergebe:

„Ein Mann starb und hinterließ vier Söhne, und vermachte einem Manne, was soviel ist als der Anteil eines von ihnen und

[1] Vgl. Th. W. Juynboll, Handbuch d. islam. Gesetzes, Leiden 1910, S. 255.

das Viertel dessen, was bleibt von dem Drittel [des Vermögens nach Abzug des Anteils — von Rosen ergänzt], und einen Dirhem. Dann ist die Vorschrift hierfür, daß du nimmst $\frac{1}{3}$ eines Vm., dann wegnimmst (wegwirfst) von ihm einen Ant., so daß bleibt $\frac{1}{3}$ weniger ein Ant. Hierauf nimmst du weg $\frac{1}{4}$ von dem, was dir geblieben ist, d. h. $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{3}$ weniger $\frac{1}{4}$ eines Ant., und nimmst auch weg 1 Dhm., so bleibt dir $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{3}$ eines Vm., das ist $\frac{1}{4}$ des Vm., weniger $\frac{3}{4}$ eines Ant. und weniger 1 Dhm. Dies füge nun zu (den noch vorhandenen) $\frac{2}{3}$ des Vm. hinzu, dann hast du 11 Teile von 12 (Teilen) eines Vm. weniger $\frac{3}{4}$ eines Ant. und weniger 1 Dhm., die gleichkommen 4 Ant. Ergänze dies nun (فاجبر ذلك) mit $\frac{3}{4}$ eines Ant. und mit 1 Dhm., so werden 11 Teile von 12 eines Vm. gleich 4 Ant. und $\frac{3}{4}$ eines Ant. und 1 Dhm. Vervollständige nun (فكمل) dein Vm. und zwar dadurch, daß du zu den Ant. und dem Dhm. hinzufügst 1 Teil von 11 Teilen von ihnen, so bekommst du 1 Vm., das gleich ist 5 Ant. und 2 Teilen von 11 Teilen eines Ant., und 1 Dhm. und 1 Teil von 11 Teilen eines Dhm.“

Drücken wir den Text in unsern gewohnten Zeichen aus, indem wir das Legat $= x$, das Kapitalvermögen $= k$, den Anteil eines Sohnes $= t$, den Dirhem $= \Delta$ setzen, so kommen wir durch die Ausführung der vorgeschriebenen Operationen zunächst zu der Beziehung

$$\tfrac{1}{3}k - x = \tfrac{1}{3}k - t - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{3}k - t\right) - \Delta = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{3}k - \tfrac{3}{4}t - \Delta,$$

dann zu der Gleichung

$$\tfrac{2}{3}k + \tfrac{1}{4}k - \tfrac{3}{4}t - \Delta = \tfrac{11}{12}k - \tfrac{3}{4}t - \Delta = 4t,$$

woraus durch *alǵabr* $\frac{11}{12}k = 4\frac{3}{4}t + \Delta$ und durch *ikmāl*

$$k = 4\tfrac{3}{4}t + \tfrac{1}{11} \cdot 4\tfrac{3}{4}t + 1\tfrac{1}{11}\Delta = 5\tfrac{2}{11}t + 1\tfrac{1}{11}\Delta.$$

Muḥammad b. Mūsā fährt nun weiter fort: „Willst du aber den Dirhem als ganze Zahl (صحيحا) herausbekommen, so vervollständige dein Vermögen nicht, sondern wirf fort (اطرح) von den 11 Teilen des Vm. einen mit dem Dhm. (d. h. gegen den Dhm. der andern Seite) und teile die 10 bleibenden gemäß den Anteilen in 4 Ant.; dann sind sie 4 und $\frac{4}{3}$ eines Ant., folglich ist der Quotient 2 und 2 Teile von 19 Teilen eines Dirhem. Mache also das Vermögen gleich 12 (erg. Dirhem), so ist der Anteil zwei[1] und 2 Teile von 19 Teilen. — Und wenn du willst, daß der Anteil ganz(zahlig) herauskommt, so vervollständige dein Vm. und ergänze es, dann ist der Dhm. 11 vom Vermögen.“ Das heißt in

[1] Im Text steht irrtümlich سهمين statt اثنين.

unsere Ausdrucksweise übertragen: wenn man in der Gleichung $\frac{11}{12}$ k $=$ $4\frac{3}{4}$ t $+$ Δ das Kapital $= 12\ \Delta$ setzt und beiderseits Δ wegnimmt, so bleibt $10\ \Delta = 4\frac{3}{4}$ t, folglich

$$t = 10\ \Delta : \tfrac{19}{4} = \tfrac{40}{19}\ \Delta = 2\tfrac{2}{19}\ \Delta.$$

Den letzten Satz وان اردت ان تخرج النصيب صحيحا فتمم مالك واجبره فيكون الدرهم احد عشر من المال übersetzt Rosen mit “Or if you wish to exhibit the share distinctly, complete your *square* and reduce it, when the dirhem will be eleven of the *capital*”. Man sieht, daß die Gewohnheit, *māl* mit Quadrat wiederzugeben, hier zu einem ganz widersinnigen Ausdruck führt.

Die Übersetzung gibt noch zu einer Bemerkung über die arabischen Bruchzahlen Anlaß. Bei S. Günther findet sich darüber S. 200 folgende Schilderung: „Von dem späteren Alkhârki (lies Alkarḫī) und dem noch viel späteren Behā Eddīn wird uns übrigens berichtet, daß man auch mit gewöhnlichen Brüchen rechnete. Doch ließ man als aussprechbar nur solche zu, deren Nenner Einer waren; wuchs der Nenner über 9 hinaus, so war der Bruch stumm, und dann gab es für ihn nur eine umschreibende Bezeichnung.“ Ungefähr dasselbe lesen wir auch bei Cantor I³, S. 718, nur daß eine im ganzen zutreffende, von Günther übergangene Erklärung des Sachverhalts hinzugefügt wird. Rodet hat sogar eine Ähnlichkeit mit dem „Aussprechbarmachen“ der Brüche durch Verwandlung in eine Summe von Stammbrüchen bei den Ägyptern finden wollen; Cantor zweifelt, ob die Unterscheidung bereits für Muḥammad b. Mūsās Zeiten Geltung gehabt habe. Es wäre an der Zeit, daß diese rein philologische Diskussion aus der mathematischen Literatur verschwände. Es handelt sich darum, daß das Arabische von den Grundzahlen 3 bis 10 besondere Bruchzahlen bildet, wie *ṯulṯ* Drittel, *ḫums* Fünftel, *ʿušr* Zehntel[1]; das sind die „aussprechbaren“ Brüche. Für die Zehner, die als Plurale der Einer erscheinen, sind entsprechende Bildungen sprachlich unmöglich, für zusammengesetzte Zahlen nur dann, wenn sie in Faktoren bis 10 zerlegt werden können, so daß z. B. ein Achtundvierzigstel „ein Sechstel des Achtels“ heißt. Selbstverständlich bestand dieser Unterschied, solang es eine arabische Sprache gibt.[1]

[1] Neben der Hauptreihe *ṯulṯ, rubʿ, ḫums, suds* usw. bildet das Arabische auch einzelne Formen nach dem Schema *ḳatīl*, wie *ṯalīṯ, ḫamīš, ʿašīr*. Beide Arten von Bruchzahlen nebst Bildungen mit dem Suffix *-ūt* und Umschreibungen kommen im Aramäischen vor (Dalman, Gramm. d. jüdisch-paläst. Aramäisch, Leipzig 1894, S. 101, 102); vereinzelte Beispiele von Bruchzahlen wie *tūlṯā, ḥūmšā,*

Schon Muḥammad b. Mūsā äußert sich über den Tatbestand in seinem Rechenbuch; die Stelle findet sich S. 17 der lateinischen Bearbeitung[1] und lautet: Scito quod fraciones [so] appellentur multis nominibus in numerabilibus atque infinitis, ut medietas, tercia, quarta, nona et decima, et una pars ex XIII., et pars ex .XVIII., et cetera. Wie man später darüber philosophierte, zeigt eine Stelle der Iḫwān aṣ-ṣafā (ed. Bombay, Bd. I, S. 28): „Und wisse, o Bruder . . , daß die gebrochene Zahl viele Rangordnungen (*marātib*) besitzt, weil es keine ganze Zahl gibt, die nicht einen Teil hätte oder zwei Teile oder eine Anzahl von Teilen wie die Zwölf: denn ihr (kommt zu) eine Hälfte und ein Drittel und ein Viertel und ein Sechstel und die Hälfte eines Sechstels, und ebenso die Achtundzwanzig und andere als diese beiden von den Zahlen . . . Und es umfaßt sie alle eine Zehnzahl von Worten: ein Wort von ihnen ist allgemein und unbestimmt (مبهمة *mubhamah*) und neun sind speziell und bestimmt (مفهومة *mafhūmah*); von den neun Worten ist ein Wort ursprünglich (موضوعة *mauḍūʿah*), nämlich die „Hälfte“, und acht[2] sind abgeleitet (مشتقة *muštaḳḳah*), nämlich das „Drittel“ von drei und das „Viertel“ von vier und das „Fünftel“ von fünf und das „Sechstel“ von sechs und das „Siebentel“ von sieben und das „Achtel“ von acht und das „Neuntel“ von neun und das „Zehntel“ von zehn; und was das allgemeine, unbestimmte Wort anlangt, so ist es der „Teil“, weil das „Eins von Elf“ ein „Teil“ von elf genannt wird, und ebenso von dreizehn und von siebzehn und was ihm gleicht; und was die (dann noch) verbleibenden von den Wörtern für die Brüche anlangt, so sind sie angehängt (مضافة *muḍāfah*) an jene zehn Wörter, wie man statt Eins von Zwölf die Hälfte des Sechstels sagt und statt Eins von Fünfzehn ein Fünftel des Drittels und statt Eins von Zwanzig die Hälfte des Zehntels“ usw. Später heißt die Elf „die erste stumme Zahl“, was dann weiter unten (S. 29, Z. 6 v. u.) damit erklärt wird, daß sie keinen aussprechbaren Teil besitzt:

rōbaʿ, ḥōmeš auch im Syrischen und Hebräischen. Im Übrigen werden die Brüche wie in den idg. Sprachen durch die Ordinalzahlen oder durch Umschreibung „drei von sieben Teilen“ ausgedrückt.

[1] B. Boncompagni, Trattati d'Aritmetica I. Algoritmi de numero Indorum. Andere Bearbeiter, wie Joannes Hispalensis, haben die Stelle gekürzt, weil sie nichts damit anzufangen wußten (a. a. O., S. 49).

[2] Bei Dieterici, Die Propädeutik der Araber, Berlin 1865, S. 6, infolge Verlesens des Setzers „nicht“ statt acht.

واما ما قيل ان الاحد عشر اول عدد اصم فلانه ليس له جزء ينطق به.
Ich habe bei der Übersetzung der Aufgabe dem Unterschied im sprachlichen Ausdruck durch Anwendung von Ziffern für die „aussprechbaren“ Brüche und durch wörtliche Wiedergabe der „stummen“ Brüche Rechnung getragen; es liegt aber, wie man sieht, nicht der geringste sachliche Grund für Unterscheidungen vor, und es sind keinerlei Geheimnisse hinter den Bezeichnungen verborgen.

Wieder einen Schritt weiter gelangen wir bei Aufgaben, in denen an Stelle der individualisierten Unbekannten ein allgemeingültiger, für jede Art gesuchter Größen verwendbarer technischer Ausdruck tritt. Zwar kann auch *māl* als solcher gelten, sofern es sich um Bestimmung von Geldsummen handelt. Aber erst mit Einführung des Ausdrucks شىء *schai'* kommen wir wirklich zu dieser Verallgemeinerung, und es ist zu untersuchen, welche Bedeutung dem Wort, das als *cosa* „Sache, Ding“ in der Geschichte der Algebra fortlebt, eigentlich zukommt.

Daß *schai'* ein „Ding“, eine „Sache“ bedeutet, ist ganz richtig. Aber warum wurde gerade dieses Wort zur Bezeichnung der Unbekannten gewählt? Man könnte zunächst an philosophische Allgemeinheiten denken. So beginnen die Iḫwān aṣ-ṣafā ihre zahlentheoretischen Betrachtungen (a. a. O., Bd. I, S. 23) mit der Bemerkung: Das allgemeinste der Worte und Namen (nomina) ist, wenn wir sagen „das Ding“, und das „Ding“ ist entweder eines oder mehr als eines usw. Aber von solchen Abstraktionen kann hier nicht die Rede sein. Näher kommen wir den Gründen für die Wahl des Ausdrucks schon, wenn wir beachten, daß das Wort in vielen Fällen geradezu im Sinne von *māl* „Besitz“ gebraucht wird; so wenn es im Koran Sure VII, 83 (ähnlich XI, 86, XXVI, 183) heißt: فاوفوا الكيل والميزان ولا تبخسوا الناس اشياءهم „gebt volles Maß und Gewicht und schädigt die Leute nicht an ihren Sachen“. Das Wort bezeichnet aber in zahllosen Wendungen nicht ein Ding, sondern „irgend ein Ding“, irgend eine Größe, etwas, z. B.: شاى من المال etwas von dem Steuerertrag (شاى alte Schreibung für شىء; Der Islam, Bd. 2, S. 248), بشىء من علمه „mit etwas von seinem Wissen“, شىء من الخوف „etwas von der Furcht“; daher in Verbindung mit Negationen nichts, z. B. لم تك شيئا „du bist nichts“, ما تنفقوا بشىء „gebt nichts aus“; in Verbindung mit كل alles, z. B. دبر كل شىء „er lenkt alles“, هو بكل شىء عليم „er ist allwissend“, على كل شىء قدير „allmächtig“; mit dem Fragewort اى „was“, z. B. اى شىء اكبر من „was ist größer als . . .?“

Mit „Etwas“ im Sinne einer beliebigen noch zu bestimmenden Zahl oder Größe ist daher *schai'* in allen mathematischen Aufgaben, wo es zur Bezeichnung der Unbekannten dient, zu übersetzen. Ein drittes Beispiel aus den Erbteilungsrechnungen mag zugleich den Fortschritt in der Bezeichnung veranschaulichen:

فان ترك ابنين و ترك عشرة دراهم عينا و عشرة دراهم (S. 65/66)
دينا على احد الابنين واوصى لرجل بخمس ماله ودرهم فقياسه ان
تجعل ما يستخرج من الدين شيئا فتزيده على العين فيكون شيئا
وعشرة دراهم فتعزل خمسها لانه اوصى بخمس ماله وهو درهمان وخمس
شىء فيبقى ثمانية دراهم و اربعة اخماس شىء ثم تعزل الدرهم الذى
اوصى به فيبقى سبعة دراهم و اربعة اخماس شىء فتقسمه بين الابنين
فيكون لكل واحد ثلثة دراهم و نصف درهم و خمسا شىء [وهو يعدل
الشىء فقابل به فتلقى خمس شىء[1]] من شىء فيبقى ثلثة اخماس
شىء تعدل ثلثة دراهم و نصف فكمل الشىء وهو ان تزيد عليه مثل
ثلثيه و تزيد على الثلثة و النصف مثل ثلثيه وهو درهمان و ثلث
فيكون خمسة و خمسة اسداس وهو الشىء الذى استخرج من الدين ۞

„Und wenn er hinterlassen hat zwei Söhne und hinterlassen hat zehn Dirhem an Kapital und zehn Dirhem einer Schuldforderung gegen einen der Söhne und vermacht hat einem Manne ein Fünftel seines Vermögens und einen Dirhem, so ist die Rechenvorschrift[2], daß du, was von der Schuld herkommt (herausgebracht wird), «Etwas» nennst, und es zum Kapital hinzufügst, so gibt es Etwas und zehn Dirhem. Dann ziehst du ein Fünftel davon ab, weil er ein Fünftel seines Vermögens vermacht hat, und das sind zwei Dirhem und ein Fünftel Etwas, so bleiben acht Dirhem und vier Fünftel Etwas. Dann ziehst du den Dirhem ab, den er vermacht

[1] Zusatz von Rosen.

[2] Die Lösung der Aufgabe wird erst verständlich durch die von Rosen gegebene Erläuterung zum ersten Beispiel dieses Abschnitts: If a father dies, leaving *n* sons, one of whom owes the father a sum exceeding the n^{th} part of the residue of the father's estate; after paying legacies, then such son retains the whole sum which he owes the father: part, as a sett-off against his share of the residue, the surplus as a gift from the father.

hat, so bleiben sieben Dirhem und vier Fünftel Etwas; dann teilst du es zwischen den beiden Söhnen, so bekommt ein jeder drei Dirhem und die Hälfte eines Dirhem und zwei Fünftel Etwas [und das ist gleich dem Etwas. Gleiche nun damit aus, indem du zwei Fünftel Etwas] von Etwas wegnimmst, so bleiben drei Fünftel Etwas gleich drei Dirhem und einem halben. Vervollständige nun das Etwas, und das besteht darin, daß du ihm zufügst zwei Drittel desselben und zufügst den Dreiundeinhalb zwei Drittel desselben, und das sind zwei Dirhem und ein Drittel, so gibt das fünf und fünf Sechstel und das ist das Etwas, was von der Schuld herkommt.“

Das ist in unsere Zeichen übertragen:

$$(x + 10) - \tfrac{1}{5}(x + 10) = 8 + \tfrac{4}{5}x;$$
$$8 + \tfrac{4}{5}x - 1 = 7 + \tfrac{4}{5}x;$$
$$3\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5}x = x; \quad 3\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{5}x.$$

Zur Vervollständigung werden $\frac{2}{3}$ jeder Seite addiert, also ist

$$x = 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{7}{2} = 3\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{3} = 5\tfrac{5}{6}.$$

Es ist bemerkenswert, daß in dem Buch von der Erbteilung nur in dem Kapitel „Von der Rückerstattung“ und in den drei Aufgaben, die zu dem Kapitel „Von dem Kapital und der Schuld“ gehören, von der Bezeichnung der Unbekannten durch das Wort شىء *schai'* Gebrauch gemacht wird. In dem Kapitel „Von der Vervollständigung“ wird dafür regelmäßig gesagt خذ مالا „nimm irgend ein Vermögen an“, in andern Fällen wird sofort eine Zahl, die einfache Ergebnisse liefert, vorgeschlagen. Es ist nicht zu verkennen, daß bei den verschiedenen Aufgabengruppen verschiedene Schultraditionen oder literarische Quellen vorliegen, und es wäre gewiß auch für die Geschichte der Mathematik nicht ohne Bedeutung, wenn man sich dieser Erbteilungsaufgaben mit mehr Eifer als bisher annehmen würde.[1]

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so fanden wir als natürlichen und ursprünglichen Ausdruck für die Unbekannte das Wort *māl* „Vermögen“, als Maßeinheit gegebener Geldsummen den Dirhem. Neben dem Vermögen oder dem Nachlaß kann eine Anzahl anderer Begriffe als Unbekannte auftreten, die entweder auf Grund der gegebenen Beziehungen zum Vermögen oder durch willkürliche Annahmen beseitigt werden. Die Einführung des Wortes *schai'* verleiht der Ausdrucksweise einen allgemeineren Charakter, ist aber für die behandelten Aufgaben ziemlich gleichgültig.

[1] Herr H. Wieleitner (Speyer), dem ich für Verbesserungen in diesem Kapitel zu Dank verpflichtet bin, hat die Aufgaben aufs Neue durchgearbeitet und wird seine zum Teil von Rosen abweichende, dem Original mehr angepaßte Darstellung in der Zeitschrift f. d. math. u. nat. Unterr. veröffentlichen.

Deutlicher erscheint das Verhältnis der beiden Ausdrücke in dem ‘Liber augmenti et diminutionis’. Diese Schrift umfaßt im Ganzen neun Kapitel; das erste handelt von dem Vermögen, das zweite von dem Geschäft, das dritte von den Schenkungen, das vierte von den Äpfeln usw. Damit sind jeweils bestimmte Aufgabengruppen bezeichnet, die denselben Grundgedanken mit Variationen wiederholen. So lautet die erste Aufgabe bei Libri (Bd. I, S. 305): Est *census* de quo ejus tertia dempta, et quarta, fuit octo quod remansit; daß 8 Dirhem gemeint sind, ist selbstverständlich. Vollständiger ist die zweite Aufgabe: Est *census* de quo dempte fuerunt ejus tertia et quattuor *dragme*, et quarta ejus quod remansit, et residuum fuit viginti *dragme*. Hier kann von einem „Quadrat“ schlechterdings nicht die Rede sein; gleichwohl hat man geglaubt, die sekundäre Bedeutung des Wortes *māl*, die es bei den quadratischen Gleichungen haben kann, überall einsetzen zu müssen, und hat sich dadurch den Weg zum Verständnis einer ganz natürlichen Entwicklung erschwert. So schreibt Libri in der Anmerkung S. 304: „On sait qu'anciennement le mot *census* signifiait l'inconnue à la seconde puissance, et que la *res*, c'était l'inconnue elle-même. On verra quelquefois ici ces deux dénominations confondues dans des équations qui, ne contenant que la seconde puissance de l'inconnue et point de premières puissances, peuvent être considerées comme étant du premier ou du second degré, lorsque on ne tient pas compte du nombre des racines“, und er glaubt demgemäß den Ansatz der Aufgaben, in denen das Wort *census* vorkommt, mit x^2 bilden zu müssen, also mit

$$x^2 - \tfrac{1}{3}x^2 - 4 - \tfrac{1}{4}(x^2 - \tfrac{1}{3}x^2 - 4) = 20$$

für die oben zitierte Aufgabe, ohne zu bedenken, welches Maß von Unverstand er damit seinen Arabern zumutet. Gleiches gilt für das Kapitel „Von dem Geschäft“. Hier lautet die erste Aufgabe: Cum *censu* negociatus est et duplatus est census ex quo donavit *dragmam* unam. Deinde negociatus est cum residuo et duplatus est. Et donavit ex eo duas dragmas. Postea negociatus est cum residuo et duplatus est. Et donavit ex eo tres dragmas. Et quod remansit fuit decem. Quantus ergo fuit primus census? Hier bringt es Libri fertig, den Ansatz einmal mit x^2 und dann mit y zu schreiben, weil bei der Anwendung der Methode der zwei Fehler das Wort *māl*, bei der gewöhnlichen Methode der Gleichungsauflösung das Wort *schai'* angewandt ist. In Wahrheit liegt die Sache so, daß die doppelten Lösungen der Aufgaben mit ihrer doppelten Terminologie wieder auf zwei verschiedene Schulen hinweisen. Wenn es richtig sein sollte, daß die Methode der zwei Fehler aus Indien stammt, wie der Verfasser im Text[1] versichert, so wäre in Übereinstimmung mit der Überlieferung zunächst die indische Terminologie zur Erklärung der Ausdrücke *māl, dirham* und *schai'* heranzuziehen. Wir kämen damit ohne jede Schwierigkeit auf die Gleichsetzung von

māl = *dhānam* „un bien, une propriété, une richesse, un profit" (Rodet, S. 23),

schai' = *yāvat tāvat*, irgend eine Größe (gegen Hankel, S. 264, und Cantor I³, S. 723),

dirham = *rūpa* = *rūpaka* (Cantor I³, S. 620; vgl. Rodet, S. 44[1]).

Daß das indische *yāvat tāvat* = *quantum tantum* arabisch kaum anders und jedenfalls nicht einfacher als durch das Wort *schai'* zu übersetzen ist, ergibt sich aus den oben angeführten Belegen. Es kann daher nur noch zwei Fragen geben: stimmen auch die für die quadratischen Gleichungen hinzukommenden Kunstausdrücke zu den indischen, und können wir ohne die Annahme direkter Entlehnungen aus griechischen Quellen auskommen?

Es ist zweifellos möglich, ja wahrscheinlich, daß ein Teil der indischen Termini auf griechische zurückgeht. So wird ohne weiteres *rūpaka* mit δραχμή gleichgesetzt werden können, und *dhānam* kann als Bezeichnung einer positiven Größe mit τὰ ὑπάρχοντα = Besitz, Vermögen, substantia, oder εἶδος ὑπάρχον = valor positivus identisch sein. Nur für die Unbekannte fehlt ein gleichwertiger Ausdruck. Das würde den Schluß rechtfertigen, daß wenigstens hier eine indische Neuerung vorliegt. Die Aufgabengruppen selbst können von sehr verschiedener Herkunft und verschiedenem Alter sein. Die Aufgabe „Von dem Geschäft" stimmt mit der bekannten Aufgabe von der Griechin überein, die in den Jupitertempel ging und nach Verdoppelung ihres Geldes zwei Drachmen opferte (vgl. Heis, Samml. v. Beisp., 1889, S. 134); Aufgaben über Äpfel und Nüsse, wie in dem Capitulum *de pomis*, über

[1] S. 305: Compilavi hunc librum secundum quod sapientes Indorum adinvenerunt de numeratione divisionis etc. Die Erwähnung der Inder in der Überschrift geht auf Rechnung des Übersetzers.

Austausch des Geldes, wie in dem Capitulum *obviationis*[1], und Erbteilungsaufgaben finden sich auch in der griechischen Anthologie; selbst die indische Bezeichnung der verschiedenen Unbekannten durch verschiedene Farben kann in der Aufgabe, die unter dem Namen des Rinderproblems bekannt ist, ihr Vorbild haben. Nicht der geringste Anlaß liegt aber vor, in dem Worte *māl* die Übersetzung von δύναμις zu sehen, wie dies zuerst Hankel (a. a. O. S. 264, Note *) behauptet und Cantor zustimmend wiederholt hat. Weder bedeutet δύναμις einen „Besitz" oder ein „Vermögen", noch könnte ein Araber die richtige Bedeutung „Macht", *potentia*, aus der sich unser „Potenz" ableitet, mit *māl* wiedergeben. Nur der Doppelsinn unseres deutschen Wortes „Vermögen" konnte zu der Vermengung der Begriffe führen, die sich seit Hankel in den Darstellungen der Mathematikgeschichte eingenistet hat.

VII. Die Terminologie der quadratischen Gleichungen.

Geometrische Aufgaben über Zusammensetzung und Verwandlung von Flächen werden den Griechen den ersten Anstoß zur Behandlung und Lösung quadratischer Gleichungen gegeben haben. Bei Muḥammad b. Mūsā finden wir die geometrische Konstruktion nur als Mittel der Veranschaulichung, als Beweis für die Richtigkeit der gegebenen Regeln. Die ganze übrige Darstellung aber und der Charakter der Aufgaben ist rein arithmetisch. Wir begegnen am Anfang der Algebra den berühmten Definitionen:

ووجدت الاعداد التى يحتاج اليها فى حساب الجبر والمقابلة على
ثلثة ضروب وهى جذور واموال وعدد مفرد لا ينسب الى جذر ولا الى
مال ۞ فالجذر منها كل شىء مضروب فى نفسه من الواحد وما فوقه من
الاعداد وما دونه من الكسور ۞ والمال كلما اجتمع من الجذر المضروب فى
نفسه ۞ والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة الى جذر ولا
الى مال ۞ فمن هذه الضروب الثلثة ما يعدل بعضه بعضا وهو كقولك
اموال تعدل جذورا ۞ واموال تعدل عددا ۞ وجذور تعدل عددا ۞

[1] Libri, Bd. I, S. 345: Duo viri *obviaverunt* sibi quorum quisque *censum* habebat, et dixit unus eorum alteri. Da mihi ex hoc quod habes *dragmam*, et habebo quantum tibi remanebit etc.

Nach Rosen: I observed that the numbers which are required in calculating by Completion and Reduction are of three kinds, namely, *roots, squares,* and *simple numbers* relative to neither root nor square. — A *root* is any quantity which is to be multiplied by itself, consisting of units, or numbers ascending, or fractions descending. — A *square* is the whole amount of the root multiplied by itself. — A *simple number* is any number which may be pronounced without reference to root or square. — A number belonging to one of these three classes may be equal to a number of another class; you may say, for instance, "squares are equal to roots", or "squares are equal to numbers", or "roots are equal to numbers".

Wörtlich: Und ich fand die Zahlen, deren man beim Rechenverfahren der Ergänzung und Ausgleichung bedarf, gemäß drei Arten, und zwar sind es Wurzeln *(ǵuḏūr)* und Vermögen *(amwāl)* und absolute Zahl *(ʿadad mufrad)*, die nicht bezogen wird auf eine Wurzel und nicht auf ein Vermögen. Die Wurzel *(alǵiḏr)* nun, zu ihr (gehört) alles, was mit sich selbst multipliziert ist von der Eins, und was über ihr (der Eins) ist von den Zahlen, und was unter ihr ist von den Brüchen. Und das Vermögen *(almāl)* ist alles, was sich ergibt (ansammelt, *iǵtamaʿa*) aus der mit sich selbst multiplizierten Wurzel. Und die absolute Zahl ist alles von der Zahl, was ausgesprochen wird ohne Beziehung auf eine Wurzel und ein Vermögen. Unter diesen drei Arten (gibt es) nun, was einander gleich ist, nämlich wie wenn du sagst „Vermögen sind gleich Wurzeln", und „Vermögen sind gleich einer Zahl", und „Wurzeln sind gleich einer Zahl".

Eine Anmerkung Rosens sagt uns noch, daß unter dem Wort *root* die erste Potenz der Unbekannten zu verstehen sei. Das Wort *square*, lesen wir anderwärts (S. 50, Note *), is used in the text to signify either, 1st, a square, properly so called, fractional or integral; 2d, a rational integer, not being a square number; 3d, a rational fraction, not being a square; 4th, a quadratic surd, fractional or integral. Mit diesen von ihm selbst aufgetürmten Schwierigkeiten ist Rosen daher genötigt, sich jedesmal in einer Fußnote zu entschuldigen, wenn er vernünftigerweise *māl* mit *number* übersetzt (S. 51, 54, 58, 60, 61, 62, 63) oder gar *square-root* an die Stelle von *square* setzen muß (S. 53, 62, 64).

Sollen wir nun wirklich glauben, daß der Schöpfer der arabischen Terminologie einen solchen Wirrwarr von Begriffen auf das Wort *māl* gehäuft hätte? Sollte es nicht möglich sein, aus dem Labyrinth einen Ausweg zu finden?

Wir werden methodisch richtig verfahren, wenn wir zunächst die Bedeutung des neu hinzugekommenen Terminus جذر *ǵiḏr* klarstellen. Bis zum Beweis des Gegenteils werden wir annehmen dürfen, daß das Wort einen klaren und eindeutigen Sinn hat. Dieser Sinn muß derart sein, daß er widerspruchslos durch den ganzen Text hindurch bestätigt wird. Nun ist gewiß, daß der Zusammenhang zwischen *māl* und *ǵiḏr* ebensogut durch $y \cdot y = x^2$ als durch $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = x$ in unsern algebraischen Zeichen ausgedrückt werden kann; von der Definition aus ist also keine Entscheidung zu gewinnen. Wer trotz aller Schwierigkeiten nicht davon abläßt, *māl* mit Quadrat zu übersetzen, wird mit Rosen entgegen dem Wortsinn *ǵiḏr* als erste Potenz deuten müssen; er kommt aber dann zu einer terminologischen Schwierigkeit, denn eine „erste" Potenz ist für Altertum und Mittelalter ein Unding. Wer aber *māl* in seinem natürlichen Sinne, den es überall hat, weiter anwendet, hat auch für *ǵiḏr* keine Umdeutung notwendig. Nun wird *ǵiḏr* im Sinne von Quadratwurzel aus einer Zahl unzweifelhaft angewandt und festgelegt durch die Beispiele des Kapitels über Addition und Subtraktion (S. 19). Die Wurzel aus 200 kann auch Rosen nicht in die „erste Potenz einer Unbekannten" umdeuten, und wenn er das Beispiel مایة ومال الا عشرين جذرا مجموع اليه خمسون وعشرة اجذار الا مالين mit "A hundred and a square minus twenty roots, added to fifty and ten roots minus two squares" wiedergibt, so hat er entweder *māl* oder *ǵiḏr* falsch übersetzt. Ebenso verfehlt ist die Übersetzung von واعلم ان كل جذر مال معلوم او اصم تريد ان تضعفه ومعنى اضعافك اياه ان تضربه فى اثنين فينبغى ان تضرب اثنين فى اثنين ثم فى المال mit "If you require to double *the root of any known or unknown square* (the meaning of its duplication being that you multiply it by two) then it will suffice to multiply two by two and then by the square"; denn es muß heißen „jede rationale oder irrationale Wurzel aus einer Zahl".[1] Alle

[1] Warum Rosen seine Übersetzung S. 27 in einer Note S. 192 verbessert, ohne darauf aufmerksam zu machen, daß er jetzt mit *"the root of a rational or irrational number"* etwas ganz anderes sagt, ist mir nicht klar geworden; noch weniger, warum er trotz solcher sich aufdrängenden Erfahrungen hartnäckig dabei bleibt, *māl* mit *square* wiederzugeben. Richtig wird die Übersetzung erst, wenn man die Worte معلوم او اصم auf جذر *ǵiḏr* statt auf مال bezieht; ein „Quadrat"

Schwierigkeiten verschwinden mit einem Schlage, wenn wir *māl*, das Vermögen, mit Zahl, oder, um einer Verwechslung mit der „absoluten Zahl“ auszuweichen, mit Zahlgröße, und *ǵiḏr* mit Wurzel (im eigentlichen Sinne) übersetzen. So und nicht anders sind die Ausdrücke in der Algebra des Muḥammad b. Mūsā zu verstehen; ob und wie sich an sie eine Weiterentwicklung anschließt, wird noch zu untersuchen sein. Gehen wir auf die Beispiele zurück, die auf die oben angeführten Definitionen folgen, so zeigt sich sofort die größere Zwanglosigkeit der neuen Übersetzung. Wir sagen nicht „ein Quadrat ist gleich fünf seiner Wurzeln“, sondern „eine Zahl ist gleich fünf ihrer Wurzeln“; wir sagen nicht „ein Quadrat, multipliziert mit seinem Vierfachen, gibt ein Drittel des ursprünglichen Quadrats“, sondern „eine Zahl“ usw. — hier gebraucht auch Rosen den Ausdruck *a quantity* —; wir übersetzen das Beispiel S. 38 فان قال مال تضربه فى ثلثة فيكون عشرة فقياسه انك اذا ضربته فى مثله كان ثلثين فتقول المال جذر ثلثين nicht mit „If somebody ask you for the amount of a *square-root*, which when multiplied by its third amounts to ten, the solution is, that when multiplied by itself it will amount to thirty; and it is consequently the root of thirty“, sondern mit „wenn einer sagt, eine Zahl, mit ihrem Drittel multipliziert, gibt zehn — so ist die Methode dafür, daß, wenn du sie mit sich selbst multiplizierst, es 30 gibt, so daß du die Zahl Wurzel aus 30 nennst“.

Sehen wir uns die Beispiele an, in denen ein absolutes Glied neben Wurzeln und Vermögen vorkommt, so tritt der ursprüngliche und ungekünstelte Sinn von *māl* und *ǵiḏr* noch klarer hervor. Denn ein Araber, dem der Sinn seiner Sprache lebendig ist, für den also *māl* „Vermögen“ und *ǵiḏr* „Wurzel aus einer Zahl“ heißt, konnte ein Beispiel wie مال تضرب اربعة اجذاره فى خمسة اجذاره فيعود مثلى المال وزيادة ستة وثلثين درهما nicht anders lesen und verstehen als „ein Vermögen, vervielfachst du vier seiner Wurzeln mit fünf seiner Wurzeln, so werden daraus zwei gleiche Vermögen und eine Zunahme von 36 Dirhem“. Läßt man „Dirhem“ weg und schreibt „Quadrat“ für Vermögen, weil wir an x^2 gewöhnt

kann doch für den Araber nicht „irrational“ sein! — Die Stelle beweist übrigens, daß die Begriffe rational (ῥητός) und irrational (ἄλογος) schon Muḥammad b. Mūsā geläufig waren und nicht erst von Alkarḫī ins Arabische übergeführt wurden (Cantor I³, S. 764, Günther I, S. 207). Das ist bei ihrer Herkunft aus dem längst bekannten Euklid auch nicht wunderbar. Natürlich ist das *surdus* des Leonardo von Pisa Übersetzung von اصمّ *asamm.*

sind und das Prädikat „Dirhem“ für uns überflüssig ist (Günther, a. a. O. S. 202), so tut man dem Sinn des Textes Zwang an und versündigt sich an dem Geist der geschichtlichen Überlieferung; die sprachkundigen Mathematiker des ausgehenden Mittelalters, die wortgetreu *māl* mit *census* oder *substantia* wiedergaben, haben jedenfalls besser und angemessener übersetzt.

Ich kann das vielleicht am besten durch das Beispiel belegen, das Tropfke in seiner Geschichte der Elementarmathematik, Bd. I, S. 313, aus der Deutschen Algebra von 1461 im Wortlaut mitteilt. Es ist mit einer Aufgabe bei Muḥammad b. Mūsā identisch, deren Text nach Rosen, S. 47, wie folgt lautet: مال عزلت جذره وزدت على جذره جذر ما بقى فكان درهمين „Ein Vermögen; du nimmst weg seine Wurzel und fügst zu seiner Wurzel die Wurzel dessen was bleibt, so sind es zwei Dirhem“. Der Ansatz ist in unsern Zeichen und in genauer Übereinstimmung mit dem arabischen Text $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2\,\Delta$; wir haben nach dem Wortlaut kein Recht, $x + \sqrt{x^2 - x} = 2\,\Delta$ zu setzen, denn wenn wir *ǵiḏr* bei der Differenz $x^2 - x$ als „Quadratwurzel“ anerkennen, müssen wir *ǵiḏru mālin* als „Wurzel eines Vermögens“ mit $\sqrt{x}$ wiedergeben. Und so sagt denn auch die Deutsche Algebra — ob nach einem älteren lateinischen oder italienischen Vorbild, mag dahingestellt bleiben — wie folgt:

„Gib mir ain zensus vnd zuech darvon sin wurtz vnd von dem daz vberbelyb an dem zensus zuech och auß dye wurtz, die zwo wurtz tue zusammen daz 2 zal daraus werden.“

Dieser Text wird durch $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2\Delta$ dargestellt. Die Reduktion geht dann nach dem arabischen Text so vor sich, daß von beiden Seiten $\sqrt{x}$ weggenommen und jede Seite mit sich selbst multipliziert wird, so daß $4\Delta + x - 4\sqrt{x} = x - \sqrt{x}$. Durch *muḳābalah* und *ǵabr* folgt $4\Delta + x = x + 3\sqrt{x}$; das ist die zweite Gleichung, die Tropfke a. a. O. mitteilt — man vermißt einen Hinweis auf ihre Abhängigkeit von der ersten —, und aus ihr folgt durch „Wegnahme von Vermögen gegen Vermögen“, also nochmals durch *muḳābalah* $3\sqrt{x} = 4\Delta$: „die Wurzel ist daher gleich einem Dirhem und einem Drittel, und das ist die Wurzel des Vermögens, und das Vermögen ist ein Dirhem und sieben Achtel eines Dirhem“.

Eine ganz strenge Wiedergabe der Form der arabischen Gleichungen müßte sich der Zeichen v (Vermögen) und w (Wurzel) und des Zeichens Δ (für Dirhem) bedienen; die Beziehung $w = \sqrt{v}$

würde die Gleichungen mit drei „Arten“ von Größen auf solche mit zwei Arten zurückführen. Man hätte also nicht $x^2 + 20 = 12x$ zu schreiben, sondern $v + 20\,\Delta = 12\,w$ oder $v + 20\,\Delta = 12\sqrt{v}$.

Die „Unbekannte“, der Ausdruck *schai'*, dient fast nur als Hilfsgröße bei der Ableitung des Ansatzes. So wenn es z. B. (S. 28) heißt: „Zehn; ich teile es in zwei Teile, dann multipliziere ich jeden Teil mit sich selbst und addiere beide, so gibt es achtundfünfzig Dirhem“ und wenn dann fortgefahren wird: „Die Methode ist, daß du einen der beiden Teile «Etwas» nennst und den andern «Zehn ohne Etwas»; multipliziere dann Zehn ohne Etwas mit sich selbst, so gibt es hundert und ein Vermögen ohne zwanzig Etwas; dann multipliziere Etwas mit Etwas, so gibt es ein Vermögen; hierauf addiere beide, so gibt das hundert und zwei Vermögen ohne zwanzig Etwas gleich achtundfünfzig“ usw. Wir können hier das „Etwas“ durch x bezeichnen und erhalten

$$(10 - x) \cdot (10 - x) + x \cdot x = 58\,\Delta \text{ oder}$$
$$100 - 20x + x \cdot x + x \cdot x = 58\,\Delta \text{ und wegen } x \cdot x = v$$
$$100 - 20x + 2v = 58\ (\Delta).$$

So nahe es uns liegt, hier nun *māl* mit „Quadrat“ wiederzugeben, der Text nötigt nicht dazu, denn die Schlußgleichung $v + 21 = 10x$ wird nachher so erläutert, daß die Hälfte der Wurzeln gleich 5 ist, es wird also *schai'* durch *ǵiḏr* ersetzt und *māl* behält seinen Sinn. Ebensowenig sind wir genötigt oder berechtigt, „Wurzel“ im modernen Sinne als Gleichungsunbekannte oder als „Lösung einer Gleichung“ zu deuten. Das sind Entwickelungen, an die Muḥammad b. Mūsā nicht gedacht hat.

Erst mit dem Übergang von der arithmetischen zur geometrischen Form der Auflösung der gemischt quadratischen Gleichungen kommt jene Bezeichnungsweise zur Geltung, in der der Begriff *ǵiḏr* durch eine Quadratseite dargestellt wird. Der Übergang ist von Muḥammad b. Mūsā so klar und deutlich gekennzeichnet, daß nichts hinzuzufügen ist. Die Stelle lautet (S. 8 und 9 des Textes):

فاما ما يحتاج فيه الى تصنيف الاجذار من الثلثة الابواب الباقية فقد وصفته بابواب صحيحة وصيرت لكل باب منها صورة يستدل بها على العلة التصنيف ۞ فاما علة مال وعشرة اجذار يعدل تسعة وثلثين درهما فصورة ذلك سطح مربع مجهول الاضلاع وهو المال الذى تريد ان تعرفه وتعرف جذره وهو سطح اب وكل ضلع من اضلاعه فهو جذره وكل ضلع من اضلاعه اذا ضربته فى عدد من الاعداد فما بلغت الاعداد فهى اعداد جذور ۞ كل جذر مثل جذر [lies ضلع] ذلك السطح فلما قيل ان مع المال عشرة اجذاره اخذنا ربع العشرة آلخ

Wörtlich: „Und was nun das anlangt, wobei die Halbierung der Wurzeln nötig ist von den drei übrigen Fällen, so habe ich es in vollständigen Kapiteln beschrieben und habe für jeden Fall davon eine Zeichnung gezeichnet, durch welche hingewiesen wird auf den Grund der Halbierung. — Was nun den Grund anlangt für «ein Vermögen und zehn Wurzeln sind gleich neununddreißig Dirhem» — so ist die Zeichnung dafür eine viereckige Fläche, unbekannt in bezug auf die Seiten (*aḍlāʿ* Plural von *ḍilʿ*, wörtlich Rippen, vgl. πλευραί), und das ist das Vermögen, das du wissen willst, und dessen Wurzel du wissen willst, nämlich die Fläche AB, und jede Seite von ihren Seiten, das ist seine Wurzel; und jede Seite von ihren Seiten, wenn du sie schlägst in eine Zahl von den Zahlen (d. i. wenn du sie mit irgendeiner Zahl multiplizierst), so sind die Zahlen, die herauskommen, Zahlen von Wurzeln. Jede Wurzel ist gleich der Seite dieser Fläche. Wenn daher gesagt wird, daß zum Vermögen noch zehn seiner Wurzeln kommen, so nehmen wir das Viertel von zehn“ usw.

Dieser ganz klare Text wird natürlich wieder vollkommen entstellt, wenn Rosen übersetzt, daß die Figur „represents the *square* (statt *the quantity*), the which, or the root of which, you wish to know“, und ebensowenig ist aus den modernisierten Darstellungen bei Cantor u. a. der Sachverhalt zu erkennen. Wenn wir heute von „quadratischen“ Gleichungen und vom „Quadrat der Unbekannten“ reden, so kommt uns der geometrische Sinn der Bezeichnung kaum noch zum Bewußtsein; der Araber weiß aber ebensowenig etwas von viereckigen Gleichungen wie von einem Wort *māl* für ein Viereck. Wenn übrigens Johannes von Sevilla das Quadrat der Unbekannten *res* nennt (Cantor I³, S. 802), so ist das natürlich nicht „eine schlechte Übersetzung von *mâl*“, sondern die Übersetzung von *schai'*. Wir haben gesehen, daß *māl* ebensogut wie *ǵiḏr* mit dem Hilfsausdruck *schai'* bezeichnet wird.

Nunmehr können wir der Frage näher treten, ob auch die Terminologie der quadratischen Gleichungen bei den Arabern zu der indischen stimmt. Sie kann, was den Ausdruck Wurzel anlangt, nur bejaht werden. Denn mag die Herkunft des indischen *mūla* sein, welche sie wolle, der Araber wußte sicherlich nichts von der *radix* des Boetius (Cantor I³, S. 724) noch von der ῥίζη, die bei Nikomachus vorkommen soll.[1] Das Wort ist und bleibt eine Entlehnung aus Indien und würde eine gewisse Abhängigkeit der arabischen Algebra von indischen Vorbildern beweisen, auch wenn nicht noch andere Ausdrücke dafür sprächen.

Daß Muḥammad b. Mūsā noch nichts von Diophant weiß, daß insbesondere der Ausdruck *māl* nicht von δύναμις abgeleitet werden kann, ergibt sich auch aus der Vergleichung von Diophants Definitionen mit dem Eingang der arabischen Algebra. Diophant beginnt (ed. Tannery, S. 2) mit dem geometrischen Bild der mit sich selbst multiplizierten Zahl, indem er unter den Zahlenarten, die auftreten können, zunächst die Quadrate nennt und der Zahl, durch deren Multiplikation das Quadrat entsteht, den Namen Quadratseite gibt: τυγχανόντων δὴ οὖν ἐν τούτοις ὧν μὲν τετραγώνων, οἵ εἰσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολυπλασιασθέντος· οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, hierauf die Würfel, die vierten, fünften und sechsten Potenzen mit den Worten definiert:

ὧν δὲ κύβων, οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τὰς αὐτῶν πλευρὰς πολυπλασιασθέντων,
ὧν δὲ [δυναμοδυνάμεων,] οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐφ' ἑαυτοὺς πολυπλασιασθέντων,
ὧν δὲ [δυναμοκύβων,] οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τοὺς ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτοῖς πλευρᾶς κύβους πολυπλασιασθέντων,
ὧν δὲ [κυβοκύβων,] οἵ εἰσιν ἐκ κύβων ἐφ' ἑαυτοὺς πολυπλασιασθέντων κτλ ...

Ich habe die drei Termini eingeklammert, weil ich sie für Zusätze von Abschreibern halte; denn nur wenn sie hier fehlen, gibt die Fortsetzung des Textes einen klaren Sinn: Ἐδοκιμάσθη οὖν ἕκαστος τούτων τῶν ἀριθμῶν συντομωτέραν ἐπωνυμίαν κτησάμενος στοιχεῖον τῆς ἀριθμητικῆς θεωρίας εἶναι· καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος δύναμις καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ Δ ἐπίσημον ἔχον Υ, Δ δύναμις· ὁ δὲ κύβος ... ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολυπλασιασθέντος δυναμοδύναμις ... ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ

[1] Cantor I³, S. 724. Tropfke bemerkt (Bd. I, S. 214, Anm. 864), daß er das Wort ῥίζη bei Nikomachus nicht habe finden können.

τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῷ πλευρᾶς κύβον πολυπλασιασθέντος δυναμόκυβος ... ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολυπλασιάσαντος κυβόκυβος ...

Wenn Diophant erst hier den Ausdruck δύναμις d. i. „Potenz" (Steigerung?) für τετράγωνος einführt und von einer „kürzeren Bezeichnung" der durch wiederholte Multiplikation mit sich selbst entstehenden Zahlenarten spricht, kann er nicht schon vorher die sonst unverständlichen Worte gebraucht haben.

Fast noch deutlicher als aus diesem Aufbau der Zahlenbegriffe ersehen wir aus der Fortsetzung des Diophantischen Textes, der die Erweiterung der Definitionen auf Potenzen von Brüchen (ἀριθμοστόν, δυναμοστόν, κυβοστόν usw.) und die Multiplikation von Potenzen und Bruchpotenzen bringt, daß Muḥammad b. Mūsā keinerlei Kenntnis von diesem Werke gehabt hat. Eine tatsächliche und gründliche Bekanntschaft mit Diophant ist erst für die Mitte des 10. Jahrhunderts bei den Arabern nachweisbar. Sie zeigt sich, was unsere Frage anlangt, in der Weiterentwicklung der Namen für die Potenzen bei Alkarḫī. Hier wird *māl* endgültig zum mathematischen Äquivalent von δύναμις, aber nicht als „Übersetzung" des Wortes, sondern auf Grund der Definition. Es muß betont werden, daß auch die ursprüngliche, natürliche Bedeutung des Ausdrucks neben der technischen ungeschmälert erhalten bleibt (vgl. Cantor. I³, S. 767, 768 und 621).[1]

Können wir nun auf Grund dieser Untersuchungen einfach sagen, die Algebra des Muḥammad b. Mūsā ist indischen, nicht griechischen Ursprungs? Das würde zum mindesten voreilig, ja verkehrt sein. Denn die geometrischen Beweise für die Auflösung

[1] Es ist von großem Interesse, daß man in den Schriften der Iḫwān aṣ-ṣafā (ed. Bombay I, S. 37, 38) einer Terminologie begegnet, die den Ausdruck *māl*, der von den Gleichungen herkommt, überhaupt nicht kennt, sondern die Wurzel *ǵidr* und das Quadrat *ʿadad maǵdūr* = *numerus radicatus* nennt. Die Definitionen stehen in einem Abschnitt „über die Multiplikation (*alḍarb*) und die Wurzel (*alǵidr*, wohl besser wie später „die Viereckszahlen" *almurabbaʿāt*) und die Würfelzahlen (*almukaʿʿabāt*), und das, was die Algebraiker und Geometer von Ausdrücken und ihren Bedeutungen gebrauchen". Das Produkt aus irgend zwei Zahlen heißt eine Viereckszahl *ʿadad murabbaʿ*, und wenn die Zahlen gleich sind, eine „gewurzelte" Viereckszahl *ʿadad maǵdūr*; die beiden gleichen Zahlen heißen die Wurzeln. Bei einer nicht quadratischen Viereckszahl heißen die verschiedenen Faktoren die beiden „Teile" (μέρη?) oder „Seiten" ضلعان (*dilʿān*), das ist die Ausdrucksweise der Geometer. An anderer Stelle (S. 30) heißt es: وكل عدد اذا ضرب فى نفسه يصير [سمى .D] جذرا و المجتمع من ذلك مجذورا „und jede Zahl, die mit sich selbst multipliziert wird, wird zur Wurzel [heißt *ǵidr*], und das davon angesammelte (das Produkt) wird [oder heißt] *maǵdūr*".

der gemischt quadratischen Gleichungen verraten durch die beigesetzten, dem griechischen Alphabet entsprechenden Buchstaben (Cantor I^3, S. 724) ebenso sicher griechischen Einfluß. Wir dürfen also von einer Zusammenarbeitung indischer und griechischer Mathematik sprechen und stehen vor der Frage, welchen Grad von Selbständigkeit wir dem Araber zugestehen können.

Die Quellen lassen uns auf beiden Seiten im Stich. Wir haben also die Wahl zwischen verschiedenen Möglichkeiten. Es ist nicht gerade wahrscheinlich, daß die indische Algebra, wie sie in den bisher übersetzten Schriften der Astronomen dargestellt ist, nur in dieser abstrakten oder konzentrierten Form gelehrt wurde. Es muß Brücken gegeben haben, die vom elementaren Rechnen zu den Höhen der wissenschaftlichen Mathematik führten. Auch den indischen Lernbeflissenen wird der Begriff der negativen Zahl erst an Vermögen und Schulden klar gemacht; die Elementarmathematiker werden also wohl bei dieser Stufe stehen geblieben sein, während Astronomen sich in abstrakteren Gedankenreihen bewegten. Wollte Muḥammad b. Mūsā, wie er selbst ankündigt, eine Einführung in die Algebra schreiben, so mußte er sich auf der mittleren Linie bewegen. Daß er sich an uns unbekannte elementare Schriften hielt, ist an sich ebensogut möglich, als daß er aus eigenem Antrieb von der Darstellung der indischen Astronomen abwich. Welches Maß von schriftstellerischer Selbständigkeit wir ihm zutrauen, bleibt solange eine Sache persönlichen Geschmacks, als wir nicht in der Lage sind, ältere Schriften, die ihm unzweifelhaft als Grundlagen gedient haben, mit seinen eigenen literarischen Leistungen zu vergleichen. Bis zu welchem Grade dies möglich ist, kann erst die Schlußbetrachtung zeigen, in der die Ergebnisse der Untersuchung der astronomischen Schriften unseres Autors der Algebra gegenübergestellt werden sollen.

VIII. Zum Aufbau des Zahlensystems.

Die Sätze, die Muḥammad b. Mūsā als Einleitung den S. 61 zitierten Definitionen voranschickt, haben verschiedene Deutung erfahren. Ich wiederhole sie im Urtext und wörtlicher Übersetzung, um daran einige Bemerkungen zu knüpfen:

(S. 3) وانى لما نظرت فيما يحتاج اليه الناس من الحساب وجدت
جميع ذلك عدد [lies اعداد] ووجدت جميع الاعداد انما تركبت من
الواحد والواحد داخل فى جميع الاعداد ✿ ووجدت جميع ما يلفظ
به من الاعداد ما جاوز الواحد الى العشرة يخرج مخرج الواحد ثم تثنى
العشرة وتثلث كما فعل بالواحد فيكون منها العشرون والثلثون الى
تمام المئة ثم تثنى المائة وتثلث كما فعل بالواحد وبالعشرة الى الالف
ثم كذلك يردد الالف عند كل عقد الى غاية المدرك من العدد ✿

Wörtlich: „Und siehe, nachdem ich betrachtet hatte, wessen die Leute beim Rechnen bedürfen, fand ich als Gesamtheit davon die Zahlen, und ich fand, daß die Gesamtheit der Zahlen nur zusammengesetzt ist aus der Eins, und die Eins eintretend in die Gesamtheit der Zahlen“[1].

„Und ich fand die Gesamtheit dessen, was von den Zahlen ausgesprochen wird (d. i. wofür es besondere Zahlwörter gibt), was über die Eins hinausgeht bis zur Zehn, fortschreitend um den Betrag der Eins; dann wird die Zehn verdoppelt und verdreifacht, wie es getan wurde mit der Eins, so daß daraus die Zwanzig und Dreißig entstehen bis zur Vollendung der Hundert; hierauf wird die Hundert verdoppelt und verdreifacht, wie es getan wurde mit der Eins und mit der Zehn bis zu Tausend usw.; dann wird ebenso wiederholt die Tausend bei jedem ʿaḳd (عقد) bis zum Äußersten des Bereichs der Zahl.“

In den Sätzen über die Eins ist nichts zu finden, was über die elementarste Schulweisheit hinausgeht. Sie werden bekanntlich in der durch B. Boncompagni (Roma 1857) herausgegebenen lateinischen Übersetzung von Muḥammad b. Mūsās Rechenbuch[2] in Verbindung mit einer weiteren Bemerkung über die Einheit zitiert. Cantor hat (I^3, S. 715 u. 16) die Stelle wie folgt deutsch wiedergegeben:

„Und ich habe schon in dem Buche Aldschebr und Almukâbala, d. h. der Wiederherstellung und Gegenüberstellung eröffnet, daß jede Zahl zusammengesetzt sei, und daß jede Zahl sich über eins zusammensetze. Die Einheit also wird in jeder Zahl gefunden, und das ist es, was *in einem andern Buche der Arithmetik* ausgesprochen ist. Weil die Einheit Wurzel jeder Zahl und außerhalb der Zahl ist. . . .“

[1] Rosen: When I considered what people generally want in calculating, I found that it always is a number. I also observed that every number is composed of units, and that *any number may be divided into units.*

[2] B. Boncompagni, Trattati d'Aritmetica, I, S. 2.

Man muß aber, um den Sinn richtig zu erhalten, folgendermaßen lesen: „. . . daß jede Zahl sich über eins zusammensetze, die Einheit also in jeder Zahl gefunden werde. — Und das ist es, was in einem andern Buche der Arithmetik ausgesprochen ist: daß die Einheit Wurzel jeder Zahl und außerhalb der Zahl ist . . .“ Das Zitat aus der „Algebra“ geht nur bis „gefunden werde“. Eneström hat sich durch die freie Übersetzung Rosens irre leiten lassen, wenn er[1] das Äquivalent der Stelle weiter unten in „every number which may be expressed from one to ten, surpasses the preceding by one unit“ usw. sucht. Das folgende Stück aber ist ein klares und unzweideutiges Zitat aus einem „andern Buche über Arithmetik“. Was für ein Buch dies ist und ob Muḥammad b. Mūsā damit auf ein von ihm selbst verfaßtes Buch über spekulative Arithmetik anspielt, ist die Frage.

Nach Eneström (a. a. O. S. 71) müßte man annehmen, daß Cantor den Muḥammad b. Mūsā zum Verfasser eines solchen Buches gemacht hätte. Davon ist aber doch nirgends die Rede; Cantor schließt nur, daß, wer so schrieb, „in der Zahlenlehre der Neupythagoräer wohl geschult sein mußte“, und „daß dem Verfasser darüber Kenntnisse zu Gebote standen, welche unmittelbar oder mittelbar auf Nikomachus, vielleicht auch auf Theon von Smyrna, der am deutlichsten betont hat, die Einheit sei keine Zahl, zurückgehen“. Welche Bewandtnis es in Wahrheit mit der Stelle hat, erkennt man aber sofort, wenn man sie in ihrem gesamten Umfang beizieht. Sie lautet:

Et iam patefeci *in libro algebre et almucabalah*, id est restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus, et quod uniuersus numerus componatur super unum. Vnum ergo inuenitur in uniuerso numero.

Et hoc est quod in alio libro arithmetice dicitur: Quia unum est radix uniuersi numeri, et est extra numerum. Radix numeri est, quare per eum inuenitur omnis numerus. Extra numerum uero est, quare inuenitur per se, idest absque alio aliquo numero. Reliquus autem numerus sine uno inueniri non potest. Cum enim unum dicis, inuentione sui non indiget alio numero. Reliquus autem numerus indiget [indiget] uno: quare non potes dicere duo uel tria, nisi precedat unum. Nichil aliud est ergo numerus, nisi unitatum collectio; et hoc quod diximus non potes dicere duo uel tria, nisi precedat unum: non de uoce diximus, ut ita dicam, set de re. Non enim possunt esse duo uel tria, si unum auferatur. Vnum uero potest esse absque secundo uel tercio. Igitur nichil aliud sunt duo, nisi unius duplicitas uel geminatio: et similiter tria nichil aliud sunt, nisi eiusdem unitatis triplicatio: sic de reliquo numero intellige. *Set nunc redeamus ad librum.*

[1] Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 8, 1907/08. S. 70.

Inueni, *inquid algorizmi*, omne quod potest dici ex numero, et esse quicquid excedit unum usque in .IX. etc.“ . . .

Hier ist doch mit Händen zu greifen, daß die ganze Stelle ein Einschub des Übersetzers, oder wie wir jetzt richtiger sagen werden, des Bearbeiters des Rechenbuchs ist, und daß wir Muḥammad b. Mūsā für diese scholastische Haarspalterei nicht verantwortlich machen dürfen. So deutlich sich der Zusatz als solcher durch Inhalt und sprachliche Form verrät, so deutlich ist das folgende wieder ein Zitat aus Muḥammad b. Mūsās eigener Algebra, das sich zu einer umständlicheren Behandlung des Gegenstandes erweitert. Man braucht nur Text und Übersetzung der zweiten Hälfte des S. 71 mitgeteilten Zitats neben den Text des Rechenbuchs zu stellen, um sich davon zu überzeugen:

„*Inueni omne quod potest dici ex numero*, et esse *quicquid excedit unum usque in .IX.* [lies X], idest quod est inter .IX. [lies X] et unum, idest duplicatur unum et fiunt duo; et triplicatur idem unum, fiuntque tria, et sic in ceteris usque in .IX. *De inde* ponuntur .X. in loco unius, et *duplicantur .X. ac triplicantur, quemadmodum factum est de uno, fiuntque* ex eorum duplicatione .XX., ex triplicatione .XXX., et ita *usque ad .XC. Post hec* redeunt .C. in loco unius, et *duplicantur* ibi *atque triplicantur quemadmodum factum est de uno et .X.*; efficiunturque ex eis .CC. et .CCC. et cetera *usque in .DCCCC. Rursum ponuntur mille* in loco unius; et duplicando et triplicando, ut diximus, fiunt ex eis .II. milia, et .III. et cetera *usque in infinitum numerum, secundum hunc modum.* — Et inueni quod operati sunt yndi ex his differentiis. Quarum prima est differentia unitatum etc.“

Die übereinstimmenden Stellen sind, soweit möglich, durch Kursivdruck herausgehoben. Vergleichung im einzelnen zeigt, daß zwei verschiedene Betrachtungsweisen zusammengearbeitet sind. In der älteren Algebra betont der Verfasser den sprachlichen Aufbau des Zahlensystems, nennt also die zehn Grundzahlen und die Grenzzahlen 100 und 1000; die „Rechenkunst der Inder“ sieht mehr auf die Klassen der Zahlen, gruppiert also nach Einern, Zehnern, Hunderten, Tausendern usw. Richtiger wäre es, wenn es hieße: *usque in* X, C, M; denn nur dann kann man sagen *deinde ponuntur* X, *post hec redeunt* C, *rursum ponuntur* M. Am Schluß vermißt man die Übersetzung von عند كل عقد „bei jeder Gliedzahl". Mit dem folgenden Satz wird das Thema des Rechenbuchs, wie es von Muḥammad b. Mūsā zu Anfang durch *Cum uidissem yndos constituisse .IX. literas in uniuerso numero suo* angeschlagen ist, wieder aufgenommen.

Auch am Schluß des langen Abschnitts S. 3/4 stehen die Worte *Nos autem redeamus ad librum.* Wir haben also nach Anzeichen zu suchen, wo wir die Grenze zwischen dem echten Text des Rechenbuchs und der Erläuterung des Bearbeiters zu setzen haben. Es wurde schon oben S. 46 darauf hingewiesen, daß der Ausdruck *in similitudine .o. litere* die Hand eines Bearbeiters verrät. Jetzt können wir den größten Teil von S. 3 als Kommentar kennzeichnen. Denn wenn nach den eben angeführten Schlußworten der nächste Absatz weiterfährt „Post differentiam decenorum sequitur *differentia centenorum, in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a* .C. *in* .DCCC." usw., so muß die Unterbrechung des Textes da stattgefunden haben, wo von den Zehnern die Rede war. Das ist aber wenige Zeilen nach der Erwähnung der Inder an der zwischen die Zeichen ‖ eingeschlossenen Stelle der Fall:

... Quarum prima est differentia unitatum, in qua duplicatur et triplicatur quicquid est inter unum et .IX. Secunda differentia decenorum, in qua duplicatur uel triplicatur quicquid est a .X. in nonaginta. ‖ Tercia differentia centenorum, in qua duplicatur uel triplicatur quicquid est a .C. in .DCCC. ‖ Quarta uero est differentia milium, in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a mille in .IX. M. Quinta differentia est .X. hoc modo: quocienscumque ascenderit numerus, adduntur differentie.

Hieran schließt sich die Erläuterung für die Einer und Zehner mit den Worten: erit dispositio numeri ita: omne unum quod fuerit etc., wie später dem Satz über die Hunderter die Erläuterung folgt: et eius figura est sicut figura unius etc. Die sorgfältige Durchsicht und Vergleichung der vorhandenen Bearbeitungen des Rechenbuchs würde gewiß zu weiteren Ergebnissen führen, doch liegt eine solche Untersuchung außerhalb des Rahmens dieser Arbeit. Daß die Handschrift verstümmelt ist, da sie keineswegs die ganze indische Rechenkunst umfaßt, sondern mit der Multiplikation von Ganzen und Brüchen abbricht, scheint noch nirgends Beachtung gefunden

zu haben.[1] Auch eine andere Eigentümlichkeit der lateinischen Handschrift ist noch kaum beachtet worden: daß sie die Ziffern der Inder, die sie doch samt ihrem Rechenverfahren lehren will, nur an ganz wenigen Stellen anwendet, statt ihrer also römische Zahlzeichen und ausgeschriebene Worte setzt oder einfach Lücken läßt, wo die Ziffern stehen sollten. Es sei den Kennern der mittelalterlichen Mathematikhandschriften überlassen, ihre Schlüsse daraus zu ziehen.

Ich kehre zu der oben wiedergegebenen Stelle aus der Algebra zurück, um den zweiten Teil des Zitats zu erläutern. Der Anfang ist weder nach dem lateinischen „omne quod potest *dici* ex numero" noch nach dem Englischen von Rosen „which may be *expressed* from one to ten" ohne weiteres verständlich. Der Sinn des Ganzen ist, daß man, um alle Zahlen bis ins Unendliche auszudrücken, nicht mehr als zwölf Grundwörter nötig hat, die Zahlwörter von 1—10, das Zahlwort 100 und das Zahlwort 1000; eine Beobachtung, die häufig in arabischen Rechenbüchern wiederkehrt, in besonderer Breite aber wieder von den Iḫwān aṣ-ṣafā erörtert wird, deren Ausführungen ich nach der Ausgabe von Bombay[2] (Bd. I, S. 24) wiedergebe:

واعلم يا اخى بان العدد الصحيح رتب اربع مراتب احاد وعشرات ومئات والوف فالاحاد من واحد الى تسعة والعشرات من عشرة الى تسعين والمئات من مائة الى تسع مائة والالوف من الف الى تسعة الف ويشتملها كلها اثنتا عشر لفظة بسيطة وذلك من واحد الى عشرة عشرة الفاظ ولفظة مائة و لفظة الف فصار الجميع اثنتا عشرة لفظة بسيطة واما سائر الالفاظ فمشتقة منها او مركبة او مكررة فالمكررة [lies فالمشقة] كالعشرين من العشر والثلثين من الثلثة والاربعين من الاربعة وامثال ذلك واما المركبة [كالمائتين] وثلثمائة واربعمائة وخمسمائة فانها مركبة من لفظة المائة مع سائر الاحاد وكذلك [الفان] وثلثة الف واربعة الف فانها مركبة من لفظة الالف مع سائر الالفاظ من الاحاد

[1] Ich finde wenigstens keinen Hinweis darauf bei Cantor I³, S. 718.

[2] Die Ausgabe von Dieterici hat S. 257 einen stark gekürzten Text, dessen Varianten man dort vergleichen mag. Auch unser Text ist nicht frei von Fehlern und Unklarheiten; sie sind von mir sinngemäß beseitigt.

والعشرات والماءت كما يقال خمسة الاف وسبعة الاف وعشرون الفا ومائة الف وسائر ذلك وهذه صورتها ✿

„Und wisse, o Bruder, daß die ganze Zahl abgestuft wird in vier Stufen (Rangordnungen, *marātib*) nach Einern, Zehnern, Hundertern und Tausendern; die Einer (reichen) von 1 bis 9 und die Zehner von 10 bis 90 und die Hunderter von 100 bis 900 und die Tausender von 1000 bis 9000; sie alle umfassen zwölf einfache Wörter, nämlich von 1 bis 10 zehn Wörter und das Wort Hundert und das Wort Tausend, so daß es im ganzen zwölf einfache Wörter sind. Was aber die übrigen Wörter betrifft, so sind sie etymologisch abgeleitet *(muštakkah)* aus ihnen oder zusammengesetzt *(murakkabah)* oder wiederholt *(mukarrarah)*. Die etymologisch abgeleiteten sind wie *ʿišrūna* (20) von *ʿašrun* (10) und *ṯalāṯūna* (30) von *ṯalāṯatun* (3) und *arbaʿūna* (40) von *arbaʿatun* (4) und dergleichen; was die zusammengesetzten anlangt, wie [200[1] und] 300 und 400 und 500, so sind sie zusammengesetzt aus dem Wort Hundert mit den übrigen Einheiten, und ebenso [2000[1] und] 3000 und 4000, denn sie sind zusammengesetzt aus dem Wort Tausend mit den übrigen Wörtern von den Einern und Zehnern und Hundertern, wie man sagt 5000 und 7000 und 20000 und 100000 usw.; und dies ist ihre Darstellung:"

Auf diese Worte folgt die bereits oben S. 44 mitgeteilte Tabelle. Wir vermissen im Text und in der Tabelle Beispiele für die „wiederholten" Zahlen und hätten den Text etwa wie folgt zu ergänzen: „Und was die wiederholten Zahlen anlangt, wie drei tausendtausend und fünf tausendtausendtausend und dergleichen, so sind sie wiederholt aus dem Wort tausend mit den übrigen Wörtern von den Einern und Zehnern und Hundertern".

Was hier in breiter Ausführlichkeit entwickelt wird, sagt Muḥammad b. Mūsā in unnachahmlicher Kürze, ja er geht mathematisch noch einen Schritt weiter, indem er sagt, daß das Zahlwort 1000 bei jedem „Gliede" bis ins Unendliche (bis zum äußersten Bereich der Zahl) wiederholt wird. Dies ist der Sinn der von Rosen mit den Worten: „then the thousand *can be thus repeated at any complex number*" schief wiedergegebenen Stelle.[2]

[1] Die Zahlwörter 200 und 2000 sind im Arabischen als Duale etymologisch abgeleitet, stehen also zu Unrecht hier.

[2] Der entsprechende lateinische Text bei Libri (a. a. O., S. 254) ist nicht, wie Eneström (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 8, 1907/08, S. 151[4]) meint, verstümmelt, sondern buchstäblich richtig, wenn man nur vor *reiteratur* einen Punkt setzt, so daß zu lesen wäre: „... post hoc similiter. Reiteratur mille apud unumquemque articulum usque ad id quod comprehendi potest de numeris ultime".

Wir haben oben gesehen, daß die Iḫwān aṣ-ṣafā vier Rangordnungen der ganzen Zahlen unterscheiden. Sie führen das Thema S. 26 noch weiter aus, indem sie bemerken, daß dies keine naturnotwendige (*ḍarūrijj*), im Wesen der Zahl begründete Sache sei, wie die Unterscheidung von geraden und ungeraden, ganzen und gebrochenen Zahlen, sondern lediglich eine durch den Gebrauch festgesetzte (*waḍʿijj*), indem die Philosophen diese Auswahl[1] getroffen haben. Der Grund liege darin, daß der Schöpfer die meisten grundlegenden Dinge der Natur zu je vieren geschaffen habe, wie die vier Grundeigenschaften des Heißen und Kalten, Feuchten und Trockenen, die vier Elemente Feuer, Luft, Wasser, Erde, die vier Körpersäfte, die vier Jahreszeiten, die vier Weltgegenden, die vier astronomischen Kardinalpunkte und die vier Stufen der geschaffenen Wesen, Steine, Pflanzen, Tiere, Menschen.[2] Mehr als vier Rangstufen unterscheiden nur die „Pythagoreer", und zwar sind es gemäß der Tabelle S. 28 die folgenden von 10^4 bis 10^{15}:

10^4 =	دبوات	*dabawāt*	=	Zehntausender
10^5 =	نوعات	*nauʿāt*	=	Hunderttausender
10^6 =	غايات	*ǵājāt*	=	Tausendtausender
10^7 =	سورات	*sūrāt*	=	Zehntausendtausender
10^8 =	حلبات	*ḥalabāt*	=	Hunderttausendtausender
10^9 =	البطات	*albaṭāt*	=	Tausendtausendtausender
10^{10} =	هنيات	*hanijāt*	=	Zehntausend t. t.
10^{11} =	دعورات	*daʿwarāt*	=	Hunderttausend t. t.
10^{12} =	وهوات	*wahuwāt*	=	Tausendtausend t. t.
10^{13} =	مجوات	*maǵawāt*	=	Zehntausend t. t. t.
10^{14} =	ومور(ات؟)	*wamūr(āt)*	=	Hunderttausend t. t. t.
10^{15} =	مارو(ات؟)	*māruw(āt)*	=	Tausendtausend t. t. t.

Dies ist die Stelle, die bei Cantor (I^3, S. 739) in der Form erwähnt wird: „aber die Pythagoräer, die Männer der Zahlen, kannten 16 Stufen derselben 1000·1000·1000·1000·1000", und die er so versteht, daß, während im Arabischen die selbständigen Zahl-

[1] Die Worte *biʾiḫtijārin minhum* bedeuten nicht „willkürlich einführten", wie Dieterici, Propädeutik der Araber, S. 4 übersetzt.

[2] Eine ähnliche Stelle aus dem Kommentar des Alkalaṣādī zum *Talḫīs* des Ibn Albannā hat Woepcke im Journ. As., 6. Sér., Bd. 1, 1863, S. 58 mitgeteilt. Dort werden den Pythagoreern aber nur sechs Rangstufen zugeschrieben.

wörter sich nicht auf andere Rangeinheiten als auf 1, 10, 100, 1000 erstrecken, die Pythagoreer solche Namen bis 10^{15} besaßen. Wenn diese Auffassung richtig und die Aussage wahrheitsgetreu sei, so sei der Zusammenhang zwischen Indern und Neupythagoreern in Dingen, die auf das Zahlensystem Bezug haben, um einen neuen Beleg reicher, und die Hypothese des Eindringens indischer Zahlzeichen in jene griechische Schule werde immer wahrscheinlicher.

Die Auffassung der Stelle ist richtig; für ihre unsinnige Form ist nicht Cantor, sondern Dieterici verantwortlich zu machen, der weder seinen eigenen arabischen Text vollständig übersetzt, noch diesen selbst, wie es scheint, vollständig aus der Handschrift mitgeteilt hat.[1] Ob die Aussage aber wahrheitsgetreu ist, fordert eine besondere Untersuchung. Die Form der Wörter, die die Bombayer Ausgabe mitteilt, ist meist dem Arabischen angepaßt; ihre Umschreibung mit lateinischen Buchstaben ist unverbindlich, soweit die kurzen Vokale in Frage kommen; die beiden letzten Wörter scheinen verstümmelt, möglich sind aber Verderbnisse jeder Art bei jedem Wort, und solange nicht zahlreiche Handschriften zum Vergleich herangezogen sind, läßt sich über die wahrscheinliche oder gar ursprüngliche Form dieser Ausdrücke gar nichts sagen. Sachlich stimmt die Mitteilung mit der bekannten Tatsache, daß die Inder besondere Wörter für die höheren Potenzen von Zehn besitzen; irgendeine sichere Übereinstimmung mit in der mir zugänglichen Literatur angegebenen Namen zu finden, ist mir jedoch nicht gelungen und war von vornherein unwahrscheinlich.[2] Am allerwenigsten darf man glauben, daß sich hinter dem Namen „Pythagoreer" irgend welche greifbaren Nachrichten verbergen. Man legt sol-

[1] Fr. Dieterici, Die Abhandlungen der Ichwân es-safâ in Auswahl, S. 279 unten. Die Seitenzählung springt hier von 258 auf 279 ff. — Während der Bombayer Text vor der Tabelle nur sagt „und dies (ist) ihr Bild", bietet die Ausgabe von Dieterici „und dies (ist) ihr Bild und ihre Wörter und Rangstufen", wie es die Tabelle im Bombayer Text zeigt; sie bringt aber nur die arabischen Zahlwörter von den Einern bis 1000 · 1000 · 1000 · 1000 · 1000. Es läßt sich ohne Einsicht in die von Dieterici benützten Handschriften nicht entscheiden, wer die Tabelle unterdrückt hat, wohl aber muß mit der größten Schärfe gesagt werden, daß die üblen Urteile über den Inhalt der Schriften der Iḫwān aṣ-ṣafā, die sich auf Dietericis Übersetzerarbeit gründen, oft genug auf diesen selbst zurückfallen.

[2] Man könnte allenfalls دبوات in عيوات *'ajuwāt* ändern und = *ayuta* setzen, ebenso نوعات = *nijuta*, غايات = *prayuta*; *maġawāt* mag an *madhya* erinnern. Stoff zu weiteren Vergleichungen nach indischen Autoren und nach Alberūnī findet sich bei Woepcke, Journ. As., 6. Sér., Bd. 1, 1863, S. 251—285.

chen pseudowissenschaftlichen Angaben immer noch viel zu viel Gewicht bei; das einzige, was sich mit einiger Wahrscheinlichkeit festhalten läßt, ist dies, daß die Iḫwān aṣ-ṣafā auf irgendeinem Wege Kenntnis von indischen Zahlbezeichnungen für die höheren Potenzen von 10 erhalten haben. Daß sie diese den „Männern der Zahl" (اصحاب العدد — der Ausdruck fehlt in der Bombayer Ausgabe) zuschrieben, und daß diese ihnen mit den Pythagoreern zusammenfielen, ist weiter nicht verwunderlich und beweist nichts für alte Beziehungen.

Der Ausdruck عقد *'aḳd* „Glied" oder Gliedzahl am Schlusse der oben zitierten Stelle kehrt auch in dem «Kapitel von der Multiplikation» wieder. Muḥammad b. Mūsā spricht hier (Rosen, S. 15) von „Gliedzahlen mit oder ohne Einer", um daran die Multiplikation zweier Binome zu erläutern:

فاذا كانت عقود و معها احاد او مستثنا منها احاد فلا بد من
ضربها اربع مرّات العقود فى العقود والعقود فى الاحاد والاحاد فى
العقود والاحاد فى الاحاد ۞ فاذا كانت الاحاد التى مع العقود زائدة
* جميعها فالضرب الرابع زائد ايضا ۞ واذا كان احدهما زائد والاخر
ناقصا فالضرب الرابع ناقص ۞

„Und wenn Gliedzahlen vorhanden sind und mit ihnen (d. h. zu ihnen addiert) Einheiten oder ausgenommen von ihnen (d. h. subtrahiert) Einheiten, so ist unvermeidlich ihr viermaliges Multiplizieren: die Gliedzahlen mit den Gliedzahlen und die Gliedzahlen mit den Einern und die Einer mit den Gliedzahlen und die Einer mit den Einern. Und wenn die Einheiten, die mit den Gliedzahlen (verbunden) sind, additiv * oder subtraktiv sind insgesamt, so ist die vierte Multiplikation ebenfalls additiv. Wenn aber eine von beiden (Einheiten) additiv und die andere subtraktiv ist, so ist die vierte Multiplikation subtraktiv."

An der mit * bezeichneten Stelle fehlen, wie man leicht sieht, die Worte او ناقصة. Den vollständigen Text hat hier nur die lateinische Übersetzung (Libri, S. 265): . . . quod si omnes *unitates* que sunt cum *articulo* fuerint addite aut diminute omnes, tunc quarta multiplicatio erit addita. Rosen aber fügt statt dieser einfachen Worte am Schluß den Satz hinzu: „if they are both negative, then the fourth multiplication is likewise positive", ohne den Leser auf seinen Eingriff aufmerksam zu machen.

Die von Muḥammad b. Mūsā gegebenen Beispiele bewegen sich alle um die Zahlen 10 ± 1, 10 ± 2, so daß man aus ihnen allein schließen könnte, daß das Wort *ʿakd* die engere Bedeutung „Zehner“ hat (vgl. DE SACY, Gramm. arabe I, § 741). Man könnte also von Alḫwārazmī wiederholen, was (CANTOR I³, S. 909) mit nicht soviel Recht vom „Algorithmiker“ sagt: „ihm hieß . . . *articulus* Zehner genau mit der gleichen Unbefangenheit wie *septem* sieben, *viginti* zwanzig . . . er fühlte sich weder verpflichtet noch berechtigt, neue Wörter einzuführen, wo es nur um alte Begriffe sich handelte . . .“ Dagegen kann ROSENS ‘*greater* number’ oder ‘*complex* number’ nicht durch die Bemerkung S. 187 begründet werden: „from this passage, and another on page 10 [lies 15], it *would appear*, that our author uses the word عقد, plur. عقود, knot or tie, as a general expression for *all* numerals of a higher order than that of the units“. Denn nur in der ersten Stelle, wo es heißt: „jede Gliedzahl bis in den äußersten Bereich der Zahl“, liegt zweifellos die erweiterte Bedeutung von *ʿakd* vor.

Die frei umschreibende Übersetzung von ROSEN versagt an beiden Stellen, wenn man sie zu textkritischen Untersuchungen benützen will: niemand kann ahnen, daß, was er *greater number* und *complex number* nennt, arabisch عقد d. i. nach ROSEN „Knoten“ oder „Band“ heißt. Die wortgetreue lateinische Übersetzung läßt uns darüber nicht im Zweifel; wer *articuli* (oder wie Robert von Chester *nodi*) schrieb, hatte das arabische Wort عقود vor sich, wer *unitates* schrieb, übersetzte das Wort آحاد.

Es handelt sich keineswegs um Trugschlüsse, wie CANTOR sagt, wenn man lateinische Übersetzungen zur Wiederherstellung des Urtextes benützt, sondern um ein methodisch durchaus einwandfreies, in der gesamten Philologie befolgtes Verfahren, sofern es nur mit der jederzeit nötigen Kritik angewandt wird. Die Ausführungen, die er S. 802[1] und anderwärts über die Übersetzer des

[1] Im Anschluß an die Bemerkung, daß Johannes von Sevilla die Wörter *digitus* und *articulus* gebraucht, heißt es: „Jene Übersetzer des XII. Jahrhunderts, die anderen so gut wie Johannes von Sevilla, benutzten eben die Wörter, welche in ihrer Zeit die weiteste Verbreitung hatten, sofern sie mit dem Sinne des Arabischen, hier z. B. mit Einern und Zehnern, sich deckten. Sie wollten ja nicht historische Untersuchungen anstellen und darum den Wortlaut des Gegebenen so genau wie möglich festhalten. Sie beabsichtigten vielmehr, den verbreitungswerten Inhalt zur Kenntnis ihrer des Arabischen nicht mächtigen Landsleute zu bringen und mußten darum danach streben, bereits bekannter leicht verstandener Ausdrücke sich zu bedienen. Nur wo etwas dem Begriffe nach ganz Neues vorkam, wurde mit mehr oder weniger Geschick dem Wortlaute nach übersetzt.“

XII. Jahrhunderts zum besten gibt, sind ebenso anfechtbar wie die Bemerkung S. 705, daß die arabischen Abschreiber ein besonderes Geschick an den Tag gelegt hätten, Namen unkenntlich zu machen. Die lateinischen Abschreiber haben ihnen in diesem Punkt sicher nichts vorzuwerfen.[1] Ein Widerspruch gegen die jeder sachlichen Begründung entbehrende Herabsetzung und schiefe Charakterisierung der Leistungen eines Robert von Chester, eines Athelhard von Bath, eines Gerhard von Cremona, eines Plato von Tivoli usw. scheint mir aber um so notwendiger, als sich gerade solche unkontrollierbaren Gesamturteile mit Vorliebe durch alle möglichen literarischen Kanäle in die Welt verbreiten und gläubig hingenommen werden.

CANTOR spricht von „Gelenkzahl im antiken Sinne“ und von „alten Begriffen“, die das Lateinische den Abacisten an die Hand gegeben habe. Nachdem er aber infolge von HEIBERGS scharfer Kritik[2] in der dritten Auflage seiner Geschichte der Mathematik die Stelle der „gefälschten Geometrie des Boethius“ aufgegeben hat, findet sich die älteste im Sinne des arabischen *ʿakd* deutbare Anwendung des Ausdrucks *articulus* erst bei Alcuin (gest. 804) in dem Satze: „Item progressionem numerorum *articulis*, quasi quibusdam *unitatibus*, ad infinita crescere per quasdam finitas formas videmus“ (CANTOR I³, S. 840[2]). Weder das klassische Griechisch noch das antike Latein wissen etwas von der technischen Bedeutung des Wortes; die einzige Stelle, die BANNIER im Thesaurus Linguae Latinae (Bd. II, 1900—1906, Sp. 696, 5) dafür anzuführen weiß, ist die aus dem — „gefälschten Boethius“. Sollen wir nun annehmen, daß Alcuin den Ausdruck selbst erfunden hat, oder ist es denkbar, daß schon zu seiner Zeit von Spanien her Funken arabischer Wissenschaft nach dem Frankenreich flogen?

Die von ENESTRÖM (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 9, 1908/9, S. 350) gewünschte nähere Untersuchung über das Auftreten der Bezeichnung *articulus* kann zu keinem Ergebnis führen, solange nicht die Geschichte des Ausdrucks auf arabischem Gebiet festgestellt ist. Könnte man hier eine natürliche Entwicklung nachweisen, die alle in den Schriften der Abacisten und Algorithmiker auftretenden Bezeichnungen umfaßt, so wäre auch die Hauptfrage nach der Herkunft

[1] Vgl. hierzu auch H. SUTER, Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 3, 1903, S. 408.

[2] Im Philologus, Bd. 43, 1884, S. 507—19; vgl. CANTOR I³, S. 588.

der lateinischen Terminologie erledigt. Bekanntlich hat N. Bubnow 1914 in seinem Werke „Arithmetische Selbständigkeit der europäischen Kultur" auf Grund seiner Forschungen über Gerbert und dessen Vorgänger die These verfochten, daß sich das Rechenwesen in Europa unabhängig von den Arabern entwickelt habe. Eine Auseinandersetzung mit seinen einseitig auf lateinische Texte gestützten Untersuchungen auf Grund arabischer Quellen wird notwendig sein, bevor ein endgültiges Urteil gefällt werden kann.

IX. Die Namen der arabischen Ziffern.

In einer seiner Anfragen[1] macht Eneström darauf aufmerksam, daß in der *Pratica d'arithmetica* von Ghaligai (Ausgabe von 1548) die Übersetzung einer arabischen Algebra erwähnt werde, in welcher „die 7 Terme Geber, Elmechel, Elchal, Elchelif, Elfazial, Buram und Eltermen" vorkämen. Nach einer Mitteilung von Suter enthalte die Algebra des Alkhwarizmi jedenfalls nicht die Terme Elchelif, Buram und Eltermen; es sei daher wünschenswert, die jetzt bekannten arabischen Traktate über Algebra daraufhin zu untersuchen, ob sie die 7 Terme enthielten.

Eneström sagt leider nicht, wie Suter die übrigen 4 Terme auflöst. Man sieht aber leicht, daß außer dem selbstverständlichen *geber* noch *elmechel* = *almuḳābalah* ist und daß *elfazial* aus *alfaṣl* (der Unterschied), *elchal* durch Verlesen aus *almāl* (das Vermögen) entstanden sein kann. Ich würde vielleicht noch wagen, *eltermen* mit *alitmām* (die Vervollständigung) zusammenzustellen, in *elchelif* könnte *alḥadf* (die Wegnahme) verborgen sein, aber *buram* ist hoffnungslos verderbt und trotzt jedem Versuch der Wiederherstellung, solange nicht die Übersetzung selbst vorliegt und der Zusammenhang Rückschlüsse auf das arabische Wort ermöglicht. Das Ganze ist ein lehrreiches Beispiel für das, was man an Verstümmelungen zu erwarten hat, wenn arabische Wörter in lateinische Schrift umgesetzt und unverstanden weiter und weiter überliefert wurden.

Wesentlich einfacher liegt die Aufgabe der Wiederherstellung des arabischen Ausdrucks, wenn die verstümmelten Wörter in lateinischen Texten erscheinen. Wenn uns z. B. in einer Beschreibung des Astrolabs, die Gerbert zugeschrieben wird[2], das Wort Hototalzagad mit den Varianten hotetalgazat, hottottaltagath, hotaltagab, hotetalsagat, noto taltagad begegnet, so würden wir ohne den lateinischen Text schwerlich imstande sein, den zugrundeliegenden arabischen Ausdruck zu finden. Lesen wir aber danach: id est breves lineae horarum, so ergibt sich ohne weiteres die Auflösung خطوط الساعات *ḫuṭūṭ alsāʿāt* = Stundenlinien.

Wenn uns an der gleichen Stelle die Wortgruppen Ethehiaser (ethehiafer) und Elewiul (elevil, elaul), Aldimataser (aldimatafer, alhimata) und Athenia, Alhamsira (alhansira) und Atheliza (athe-ziza), Ethezzea und Arrabea, Ethemina (ethemima) und Alchamiza, Escebeha und Escendeliza (esscedezza) begegnen, so wären wir wieder ratlos ohne die Bemerkung, daß diese Wörter die arabischen Namen der Stunden auf dem Stundenkreis bedeuten.

Die den Wörtern beigesetzten römischen Ziffern leiten auf die einfache Lösung hin, daß die Namen die Feminina der arabischen Ordinalzahlen sein müssen; wer würde aber ohne diesen Leitgedanken in Escendeliza das Wort *alsādisah* (*essādisa*, westarabisch *essēdisa*), in Alhamsira das Wort *alʿāširah*, in Aldimatafer oder Alhimata das Wort *alḥādijat ʿašra(ta)*, in Ethehiafer das Wort *altānijat ʿašra(ta)* vermuten? Man erkennt nun die Verschreibung *h* statt *n* und *f* statt langem *s* in Ethe*h*ia*f*er, den Ausfall von *ha* oder *he* in Al(*hā*)dimata*f*er und den Wegfall von *ser* in Alhimata, man kann sich auch die erweiterte Form Escend-*eliza* aus dem vorangehenden Ath-eliza erklären, und die Verwechslung von *m* und *n* in Ethemi*m*a begreifen, aber wodurch die Einschiebung des *m* in Alha*m*sira und Aldi*m*atafer zustande kam, wird schwerlich jemand sagen können.

Ich glaubte diese Beispiele vorausschicken zu sollen, wenn ich mich einer erneuten Untersuchung der rätselhaften Namen *igin*, *andras*, *ormis*, *arbas*, *quimas*, *calcis*, *zenis*, *temenias*, *celentis* für die Ziffern zuwende, die uns von Radulph von Laon (gest. 1131) und auch in etwas älteren Quellen überliefert sind und in der Geschichte des Rechnens eine zweifelhafte Berühmtheit erlangt haben. Anlaß zur Wiederaufnahme des Verfahrens gibt nicht so sehr die Bemerkung Cantors (I^2 S. 842, I^3 S. 896), daß er das Rätsel als immer noch nicht mit Gewißheit aufgelöst betrachte und gern bereit sei, eine zuverlässigere Deutung jener Wörter freudig zu begrüßen,

[1] Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 8, 1907/08, S. 416.

[2] N. Bubnow, Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica. Berlin 1899, S. 119. Dem Wunsche des Herausgebers, daß Arabisten die verstümmelten arabischen Wörter des Liber de Astrolabio in Ordnung bringen möchten, hoffe ich bald vollständig entsprechen zu können.

welche auch die Frage nach der Zeit der Entstehung endgültig beantworten würde, oder die von Cantor übersehene Behandlung des Gegenstands durch E. Clive Bayley[1] und die jüngste Erörterung der Frage durch N. Bubnow[2], als die Überzeugung, daß alle Versuche als methodisch verfehlt zu betrachten sind, die die Lösung des Rätsels außerhalb der geschichtlich allein möglichen Verbindung des Arabischen und Lateinischen suchen.

Wir lächeln über Helmreich (1595), der in der Vorrede zu seinem Rechenbuch den großen Geometer Algebras in Ägypten zur Zeit des Alexandri Magni, der da war ein Präzeptor oder Vorfahrer Euklidis, des Fürsten zu Megarien, die Algebra erfinden läßt[3]; aber sollen wir annehmen, daß ein Radulph von Laon am Anfang des 12. Jahrhunderts mehr von Chaldäern und Assyrern wußte und „chaldäische" Namen für die Zahlzeichen einschließlich der Null mitteilen konnte, die bei den Chaldäern in dieser Weise gar nicht existierten? Es ist doch geradezu eine Ungeheuerlichkeit, auf Grund dieser im 12. Jahrh. auftauchenden Notiz mit E. Clive Bayley anzunehmen, „that some reminiscence, at least, of the *names* of the Chaldaean units may have survived also, though in a more or less corrupted form, to Neo-Pythagorian times", dann auf Grund einer angeblichen Abstammung(!) des Arabischen und Hebräischen vom Altassyrischen mit Hilfe von „Härtung" und „Euphonie" aus ʻeštin' *igin* und aus ʻtisu' *celentis* herzustellen, und wenn dies alles noch nicht zur Erklärung der von Radulph gegebenen Wörter ausreicht, das „neupythagoreische" *andras* und *ormis* aus tamulischem *irandu* und *munru* abzuleiten![4]

Auch über die phantastischen Versuche, *igin* = ἡ γυνή, *andras* = ἀνδρ(ός?), *ormis* = ὁρμή zu setzen und *caltis* mit καλότης, *celentis* mit ἀθήλυντος oder σελήνη in Zusammenhang zu bringen[5], kann ich wohl hinweggehen. Soll bei der ganzen Untersuchung überhaupt etwas herauskommen, so dürfen wir nicht, wie es bisher

[1] Vgl. Journ. Roy. As. Soc., New Series, Bd. 15, 1883, S. 61 ff.

[2] N. Bubnow, Arithmetische Selbständigkeit der europäischen Kultur, Berlin 1914, S. 63 ff. Auf den übrigen Inhalt dieses wichtigen Buches hoffe ich in anderem Zusammenhang eingehen zu können.

[3] Nesselmann, Algebra der Griechen, S. 46.

[4] E. Clive Bayley a. a. O., S. 61—64: The resemblance is here so close(!) that it is hardly to be doubted that the Neo-Pythagoreans did adopt these terms from a Southern Indian source.

[5] Woepcke, Journ. As., 6. Sér., Bd. 1, 1863, S. 50 nach Vincent und Bienaymé; vgl. Cantor I^3, S. 895; Bubnow a. a. O., S. 66.

meist geschah, die Überlieferung als unantastbar und einwandfrei betrachten; wir dürfen auch an den überlieferten Ausdrücken nicht herum korrigieren, bis sie sich irgendeiner Theorie fügen; vielmehr können wir die Frage nur so stellen: Wenn die genannten Wörter die Namen der Ziffern sein sollen, wie konnte es kommen, daß einige dieser Namen mit denen der arabischen Zahlwörter stimmen, andere aber nicht die geringste Ähnlichkeit mit den arabischen Zahlwörtern aufweisen, denen sie angeblich entsprechen sollen?

Zunächst haben wir die Annahme zu prüfen, daß die Wörter tatsächlich die arabischen Namen für die Ziffern darstellen. Wir können uns gegen Radulphs Chaldäer auf zwei annähernd gleichaltrige Zeugnisse berufen, die die Namen ausdrücklich als arabisch bezeichnen. Das eine wird von Smith-Karpinski in The Hindu-Arabic-Numerals S. 118 erwähnt; ein gewisser Turchill schreibt um 1200: „has autem figuras . . . a pytagoricis habemus, *nomina uero ab arabibus*". Das andere ist von Eneström nach einer Handschrift des 11./12. Jahrhunderts mitgeteilt[1] und lautet: „Versus *de nominibus caracterum arabicorum* ad abacum pertinentium". Aber solche Bestätigungen sind überflüssig geworden, nachdem die von A. Björnbo unternommene, durch H. Suter vollendete Ausgabe der astronomischen Tafeln des Muḥammad b. Mūsā[2] den direkten Beweis erbracht hat, daß in den lateinischen Übersetzungen jener Zeit mit den Chaldäern nicht die alten Babylonier, sondern die Araber gemeint sind. Zum erstenmal werden die Chaldäer bei Athelhard im 7. Kapitel *De alwacat id est medio planetarum* etc. erwähnt, wo es (a. a. O. S. 9) heißt: Item nota, quod secundum Caldeos IIII milia passus cameli miliare faciunt, atque XXXIII miliaria et tertia, id est *thuld*, in terra gradus, in coelo dimidius, unde totus terrae circulus XXIIII milia miliaria continet etc. Diese Meile, von der $66^2/_3$ auf einen Grad gehen sollen, ist nach Suter (S. 43) die von den arabischen Geographen und Astronomen in ihren Angaben gewöhnlich gebrauchte Meile zu 4000 Ellen, und *thuld* natürlich das arabische Wort für Drittel (s. o. S. 54). Noch

[1] Bibl. Math., 3. Folge, 8. Bd., 1907/8, S. 78.

[2] H. Suter, Die astronomischen Tafeln des Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama ibn Aḥmed al-Madjrīṭī und der latein. Übersetzung des Athelhard von Bath auf Grund der Vorarbeiten von A. Björnbo und R. Besthorn herausgegeben und kommentiert. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsks. Skrifter, 7. Raekke, Hist. og Filos. Afd. III, 1. Kopenhagen 1914.

klarer tritt der Sachverhalt im 10. Kapitel *De inventione loci Saturni, Jovis et Martis* hervor, wo der Bearbeiter (S. 11) den Zusatz macht: . . . quodque inde surget, a Caldeis *elhacil*, a nobis obtentum vel centrum ultimum potest dici. Es handelt sich um das Wort الحاصل *alḥāṣil*, das Ergebnis, wir sehen also, daß diese Chaldäer arabisch sprechen; zum Überfluß hat die Handschrift O auch für a Caldeis das Wort *arabice* eingesetzt.

Auch aus dem vorhin beigezogenen, von Bubnow herausgegebenen Liber de astrolabio in den Opera Gerberti läßt sich der Gebrauch des Wortes Chaldäer für Araber belegen. Wir finden S. 127 als Übergang zu Kap. IV *Ad inveniendum Nadair solis* die Worte: Nam Chaldaica astutia seu calculando seu scribendo ita progreditur; am Schluß des Kap. XVII *De vocabulis Latinis et Arabibus stellarum et formationibus earundem* S. 138 steht die Bemerkung: Sunt praeter has duae Ganamalgurab, Alcasal vel Alhimech[1] in Centauro, quibus Chaldaei satis ad discernendas horas utuntur; in dem Bruchstück einer andern arabischen Schrift über das Astrolab (Appendix V) erwähnt der Bearbeiter S. 372 Chaldaicas gentilogias, qui omnem humanam vitam astrologicis attribuunt ratiocinationibus.

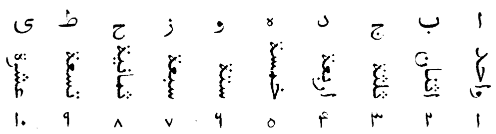
Daß auch *siriace* für *arabice* steht, erhellt aus einer Note bei Bubnow, Opera Gerberti S. 125, wo die latina sollertia die arabischen Namen der 28 Mondstationen in unglaublicher Weise übersetzt hat.[2] Um so verwunderlicher ist es, daß Bubnow S. 72 seines Werkes über die arithmetische Selbständigkeit der europäischen Kultur über die Ziffern schreibt: „Kein Abacist des X.—XI. Jahrhunderts deutet irgendwo an, daß diese Zeichen etwas Neues oder gar Arabisches wären. Radulf lebte zu einer Zeit, wo der arabische Einfluß immer stärker wurde, und dennoch ergeht er sich in Vermutungen über ihre Herkunft aus Assyrien, ganz wie wir, und nennt sie chaldäisch".

[1] Ganamalgurab ist offenbar جناح الغراب *ǵanāḥ alǵurāb* Flügel des Raben; zu Alcasal bieten die Handschriften noch Alhazal, Albazal; zu Alhimech: Alcumech, Alchimelech. Beide Worte ergeben in richtiger Folge zusammengestellt السماك العزل *alsimāk al'azal*, der unbewaffnete Simāk, d. i. die Spica.

[2] „Haec de XII signorum mansionibus siriace temulenta(!) nomina sic transtulit latina sollertia: Alnait (supra lin.: cornu) Albotaim (s. l.: venter). Aldoraia (cervix). Aldabran (cor). Almiscen (cauda)" etc. Es ist Alnait = الناطح *alnāṭiḥ*, der Stoßende; Albotaim = البطين *albuṭain*; Aldoraia = الثريا *alṯurajjā* die Plejaden; Aldabran = الدبران *aldebarān*, der Folgende; Almiscen wahrscheinlich = الميسان *almaisān*, der stolz Einherschreitende, ein Stern der 6. Mondstation.

Mit dem Nachweis, daß die Chaldäer der mittelalterlichen Übersetzer die zeitgenössischen Araber sind, ist wilder Spekulation ein für allemal der Boden entzogen. Die Namen müssen aus dem Arabischen erklärt werden, und wir haben uns nur den Hergang ihrer Aufnahme und Verstümmelung in lateinischen Handschriften zurechtzulegen.

Es ist leicht zu sehen, daß nicht nur für die Lateiner, sondern auch für die Araber in der Anfangszeit die Notwendigkeit bestand, den Zahlwert der 9 oder 10 Zeichen durch beigeschriebene Worte auszudrücken. Wir werden also überall da, wo die indische Rechenkunst gelehrt wurde, Zusammenstellungen erwarten dürfen, wie sie z. B. in der wiederholt erwähnten Tabelle der Iḫwān aṣ-ṣafā auftreten und hier in Originalschrift wiederholt werden:



Einer ähnlichen Zusammenstellung[1] müssen unsere Wörter entstammen, und wir haben nun, indem wir von den unanfechtbaren

[1] Es sei noch an das Beispiel oben S. 44 erinnert. Man könnte auch an mündliche Mitteilung denken, dann wären die gehörten Worte neben die Zeichen geschrieben worden. Das würde das Endergebnis der Untersuchung nicht wesentlich beeinträchtigen. Wie sich die arabischen Zahlwörter dem Ohr eines Reisenden am Ausgang des 15. Jahrhunderts darstellten, sei aus einer Liste von Wörtern, die B. von Breydenbach, Kämmerer des Hohen Stifts zu Mainz, am Ende seiner Reisebeschreibung gibt, nach dem Druck von Augsburg 1488, zugleich mit den Lautwerten des heutigen Vulgärarabisch (syrisch nach Hartmann und ägyptisch nach Probst) mitgeteilt:

Wohejt	Etneyn	Celate	Arba	Campß	Sithy	Sada	Themani
ains	zwai	drey	vier	fünff	sechs	siben	acht
wāḥid	*tnain*	*tlāti*	*arba'*	*chamsi*	*sitti*	*sab'a*	*tmāni*
wâḥed	*etnên*	*telât(e)*	*árba'*	*ḥámas*	*sitt(e)*	*sab'a*	*taman(je)*

Cyßza	Eyschara	Woheyttasch	Cementasch	Celatasch	. . . .	Acharin
neün	zehe	ailff	zwelf	XIII	. . . .	XX
tis'a	*'aśra*	*ḥda'š*	*ṭna'š*	*tlaṯta'š*	. . . .	*'iśrin*
tís'a	*''äšara*	*ḥadāšär*	*etnāšär*	*telatâsär*	. . . .	*'äšrin.*

Sada ist verhört oder verdruckt aus Saba, Cementasch aus Cenentasch, Acharin aus Ascharin. Die Zehner stimmen mehr zu den syrisch-palästinensischen Formen, die Einer zu den ägyptischen (2, 3, 8). Breydenbach hatte auf seiner Reise Gelegenheit, beide Dialekte zu hören.

Entsprechungen ausgehen, zu untersuchen, ob eine gewisse Gesetzmäßigkeit in der Umschreibung der Wörter wahrzunehmen ist. Wenn ich die arabischen Wörter in der heute üblichen Umschrift unter die mittelalterlichen Wörter setze, so scheint sich zunächst wenig Aussicht auf Erfolg zu eröffnen:

igin	andras	ormis	arbas	quimas
wāḥid	*iṯnān*	*ṯalāṯat*	*arbaʿat*	*ḫamsat*
calcis	zenis	temenias	celentis	sipos
sittat	*sabʿat*	*ṯamānijat*	*tisʿat*	*ṣifr.*

Es ist aber erstens zu beachten, daß die kurzen Vokale bedeutungslos sind und von dem, der die Umschrift erstmals herstellte, schon nach Gutdünken gesetzt werden konnten, zweitens, daß für die Umschrift der arabischen Konsonanten keinerlei Norm bestand, also gleiche Konsonanten mit verschiedenen, verschiedene Konsonanten mit gleichen lateinischen Buchstaben geschrieben werden konnten, wenn nur das Lautbild ungefähr stimmte, und drittens, daß nur das vokallose Buchstabengerippe der Wörter, und selbst dieses mit der Möglichkeit von falschen oder mangelhaft gesetzten diakritischen Punkten und Verwechslung ähnlicher Zeichen in das Vergleichungsverfahren eingestellt werden darf. Kommt noch dazu, daß bei der weiteren Übertragung der lateinischen Urschrift unzählige Fehler und Varianten entstehen konnten und entstanden sind, so scheint jeder Willkür Tür und Tor geöffnet zu sein. Dennoch ist jedem Arabisten bekannt und muß jedem Mathematiker, der sich an derartige Rätselfragen macht, bekannt sein, daß hier kein Wort zuviel gesagt ist und mit all diesen Möglichkeiten gerechnet werden muß, wenn man bei dem Versuch einer Lösung des Rätsels zum Ziel kommen will.

Hiernach hätten wir unter Zuziehung der bekannt gewordenen Varianten[1] und mit Hervorhebung einiger Gesetzmäßigkeiten folgende Reihe von Entsprechungen:

(1) *igin, ingnin* — واحد, احن oder اثنين?
(2) *andras* — اردعة?
(3) *ormis, hormis, armis* — ارمعة?
(4) *arbas* — اربعة
(5) *quimas, quinas* — خمس, خمسة
(6) *calcis, caletis, calctis, caltis* — ثلثة
(7) *zenis, zencis* — سبعة oder ستة
(8) *temenias, temeinas, zemenias* — ثمانية
(9) *celentis, scelentis, zcelentis* — ثلثة, ثلثثة?

[1] Nach SMITH-KARPINSKI, The Hindu-Arabic Numerals, S. 118 und der Tafel bei FRIEDLEIN, Boetius, gegenüber S. 396. Die Liste der Lesarten bedarf dringend der Nachprüfung an den Originalhandschriften.

Man sieht bei einer Vergleichung mit unserer modernen Umschrift sofort, daß das Wort *wāḥid* fehlt, daß in beiden Reihen nur ein Wort vorkommt, das auf *n* endigt: *igin* — *iṯnān* (oder *iṯnēn*), und daß die Endung *-at* überall durch *as* oder *is*, also *t* durch *s* wiedergegeben ist.

Aus den Formen unter (8) *temenias, zemenias* = *ṯamānijat* geht hervor, daß der dem englischen *th* entsprechende Laut *ṯ* durch *t* und *z* wiedergegeben wird. Die Form (5) *quimas (quinas)* ist wohl (mit spanisch-französischem *qu*) als *kimas* zu lesen und entspricht dem *ḫams(at)* unserer Liste. Die Formen unter (6) und (9) liegen alle innerhalb der Variationsbreite von *ṯalāṯat*: am nächsten kommt ihm (mit *c* = *z*) *caletis*, daran schließen sich einerseits *calctis*, *calcis* und *caltis*, anderseits *celentis* und *zcelentis*. Zur Sippe von *arbas* (4) scheint auch die Reihe *ormis*, *hormis*, *armis*, ja vielleicht selbst *andras* zu gehören. Die erste Gleichung könnte aus dem Arabischen durch Verlesen entstanden sein (اردعة = اربعة oder ارمعة), die Form *andras* würde ein *amras* als Zwischenglied vermuten lassen. Wir kommen so zu der Auffassung, daß die überlieferte Reihe nicht mehr vollständig ist, sondern nur die Zahlwörter 2, 3, 4, 5, 7, 8 wiedergibt, und daß sie Doppelungen enthält, durch die sie in Verwirrung gekommen ist, so daß sie das Wort für 3 an falscher Stelle bei 6 und 9, das Wort für 4 bei 3 und 4, für 2 bei 1 darbietet. Das Wort für 7 ergibt sich graphisch unmittelbar aus سنعة für سبعة *(zenis* für *zebis)*, *zencis* ist nach *calcis* verschrieben. Es kann aber ebensogut سنة für ستة 6 zugrund liegen. Das Wort *igin* könnte auch aus احن (für احد *igid*, eigentlich *aḥad*) entstanden sein, das für واحد stünde, doch wäre dann der Ausfall der 2 zu erklären.

Das Wort für die Null lautet in den Handschriften *sipos*. Man hat längst darauf hingewiesen, daß dies aus *ṣifr* verdorben sei. Die graphische Möglichkeit liegt auf der Hand; es braucht nur صفز oder صعز statt صفر, also Verdoppelung oder Verschiebung des diakritischen Punktes in der Handschrift angenommen zu werden, um das Schluß-*s* zu erklären. Ob es nicht trotz alledem von ψῆφος abgeleitet werden muß und erst später durch *cifra* = صفر ersetzt wurde, ist eine Frage, die hier nicht im Vorbeigehen erledigt werden kann.

Auf alle Fälle scheint es angemessener, Umstellungen und Verwechslungen der unverstandenen Wörter zuzulassen oder Dubletten anzunehmen, wenn sich der Lautbestand ohne Schwierigkeit einfügt, als durch Gewaltmittel Wörter, die sich nun einmal nicht mit den ihnen zugeschriebenen Zahlwerten zur Deckung bringen lassen, solang umzuformen, bis sie nicht mehr wiederzuerkennen sind. Wie leicht solche Verwechslungen und falschen Eintragungen zustande kommen, lehrt ein Blick auf die von Friedlein der Boetius-ausgabe beigegebene Faksimiletafel. Nur die Codd. *e*, *n* und n_2 zeigen die 9 Wörter richtig über den 9 Kolumnen, nur bei n_2 sind sie in einer Zeile geschrieben; bei *e* sind sie von ***arbas*** bis ***sipos*** in 2, bei *n* sämtlich in 2 oder 3 Stücke zerlegt und untereinander gesetzt, bei n_3 ist ***igin*** (?) über 2 Kolumnen weggeschrieben, während zugleich *sipo* über *scele(n)tis*[1] in der Neunerkolumne steht. Die älteste Handschrift n_1 (cod. Vatican. 3123, saec. X, Friedlein S. 372) scheint überhaupt noch Niemand näherer Betrachtung wert gehalten zu haben, und doch zeigt sie am besten, wie die Verwirrung entstanden sein kann. Hier sind die Wörter wie in arabischen Handschriften vertikal gestellt. Das Wort *an-dras* steht über 2 und 3, ***ormis*** über 4, ***arbas*** über 5, ***quimas*** über 6, ***calcis*** (?) über 7, ***zenis*** (?) über 8, ***zeme-nias*** über 9 und 0, ***sce-len-tis*** über drei leeren Fächern; das Wort ***sipos*** fehlt, während das Zeichen für die Null am richtigen Platze steht. Welche kühnen Hypothesen könnte und würde man aufstellen, wenn nur diese eine Handschrift bekannt wäre! Und wie mag die Vorlage beschaffen gewesen sein, aus der sie hervorging?

Man mag sich zu der ganzen Sache stellen, wie man will, es ist und bleibt schwer zu begreifen, daß in einer Zeit, in der doch wahrlich Gelegenheit vorhanden war, sich über die richtigen Formen der arabischen Zahlwörter zu verlässigen, dieser Rattenkönig von Verwechslungen und Unformen weitergegeben werden konnte. Man kann sich bei so allgemeinen Dingen wie Zahlwörtern nicht wie bei medizinischen oder astronomischen Begriffen auf sachliche Schwierigkeiten berufen. Es bleibt fast nur die Annahme, daß eine an sich schlechte handschriftliche Überlieferung schon frühe an

[1] Nach einer Vorlage, die sipos über celentis hatte.

einen Ort verschleppt wurde, wo keine Spur von arabischen Kenntnissen vorhanden war, wo man also die Worte nicht als arabische Zahlwörter erkannte, sondern für die fremden Namen der Zahlzeichen hielt. Von jenem Urtext aus muß sich dann das literarische Kuriosum weiter verbreitet haben; ein literarisches Kuriosum ohne alle sachliche Bedeutung bleibt diese ganze Einführung arabischer Namen für Zahlzeichen, die ebensogut lateinisch benannt werden konnten und benannt wurden.[1]

Es wäre auch an die Analogie der Übertragung der semitischen Buchstabennamen zu den Griechen zu erinnern. Wie dort die fremden Zeichen mit ihren unverstandenen Namen übertragen wurden, so werden in der Übergangszeit die arabischen Zahlwörter als „Namen“ für die Ziffern gebraucht worden sein.

Von dem Verfasser der bekannten Merkverse (Cantor I³, S. 893) kann man sagen, daß er weder arabisch verstand noch von der arabischen Herkunft der Worte etwas wußte; er hätte sie doch sonst unmöglich unbesehen beibehalten können. Gleichwohl glaube ich selbst in diesen Versen, wo sie nicht reines Wortgeklingel sind, Anklänge an arabische Zusammenstellungen über die „Eigenschaften der Zahlen“ nachweisen zu können, möchte sie also nicht wie Cantor nur als Gedächtnisverse zur Einprägung der fremdartigen Wörter betrachten. Man findet z. B. bei den Iḫwān aṣ-ṣafā (ed. Bombay I, 29—31) einen solchen Abschnitt في خواص العدد, über die Eigenschaften der Zahl; darin heißt die 1 Wurzel (أصل *aṣl*) und Ursprung der Zahlen, die 2 ist die erste eigentliche Zahl, die 3 die erste unpaarige Zahl, die 4 die erste Quadratzahl (عدد مجذور *ʿadad maǵdūr*), die 5 die erste Kreiszahl (wegen $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 25 = 125$), die 6 die erste vollständige Zahl (عدد تام *ʿadad tāmm*), die 7 die erste vollkommene Zahl (عدد كامل *ʿadad kāmil*), die 8 die erste Würfel- oder Körperzahl, die 9 das

[1] So in dem von V. Mortet in seinem Aufsatz „Le plus ancien traité français d'algorisme“ (Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 9, 1908/9, S. 55) mitgeteilten *Carmen de algorismo*, wo es heißt:

> Haec algorismus ars praesens dicitur, in qua
> Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris:
> 0.9.8.7.6.5.4.3.2.1.
> Primaque significat unum; duo vero secunda;
> Tertia significat tria; sic procede sinistra,
> Donec ad extremum venias, quae *cifra* vocatur,
> Quae nil significat: dat significare sequenti.

erste Quadrat einer unpaarigen Zahl usw. Stellen wir dieser Aufzählung die Verse gegenüber:

Ordine *primigeno* sibi nomen possidet Igin.
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post *numerus non compositus* sibi *primus*.
Denique *bis binos* succedens indicat Arbas.
Significat quinos *ficto de nomine* Quimas.
Sexta tenet calcis *perfecto* munere gaudens.
Zenis enim *digne* septeno *fulget honore*.
Octo *beatificos* Temenias exprimit unus
Terque notat *trinum* Celentis nomine rithmum —,

so erkennt man aus den kursiv gedruckten Worten sofort die vorhandenen Parallelen. Unverständlich sind mir nur die seligmachenden Acht und das *ficto de nomine* bei Fünf; doch könnte dies noch ein Anklang an die arabische Einteilung der Zahlwortformen sein (الموضوع الاسم من؟ s. o. S. 77), jenes an die 8 Seligpreisungen erinnern (s. Nachtrag S. 114). Vielleicht lassen sich näherliegende lateinische Vorbilder auffinden; daß alle diese Dinge auf den Gedankenkreis der Theologumena Arithmeticae zurückgehen, ist selbstverständlich.

Ich bin mit dieser Untersuchung zu Ende. Ob das nüchterne Ergebnis allgemein befriedigen wird, weiß ich nicht; daß es methodisch auf festen Füßen steht, wird kaum zu bestreiten sein. Hätte man philologisch-kritische Grundsätze stets vor Augen gehabt, so wäre das ganze Aufgebot von Gelehrtheit und Scharfsinn zur Aufdeckung alter chaldäischer oder pythagoreischer Weisheit überflüssig gewesen. Der Zweck dieser Untersuchung wäre erreicht, wenn dadurch wenigstens weiteren Phantastereien für künftig ein Ziel gesetzt würde.

X. Das Kapitel von den Geschäften.

Die Aufgaben zweiten Grades, die Muḥammad b. Mūsā im ersten Abschnitt seiner Algebra behandelt, sind rein formaler Natur und tragen nichts zu dem Zwecke bei, dem nach dem Vorwort (vgl. oben S. 5) das Werk dienen soll. Auf die eigentlichen Geschäftsaufgaben, auf das Geschäftsrechnen, kommt der Verfasser erst in dem باب المعاملات *bāb almuʿāmalāt*, dem Kapitel von den Geschäften, zu sprechen. Es hat ob seines dürftigen mathematischen Inhalts bisher kaum Beachtung gefunden und wird bei Cantor I^3,

S. 726 mit den Worten gekennzeichnet: „Indisch ist auch wohl die nur uneigentlich der Algebra zugeteilte Regeldetri, welche in der Fortsetzung von Alchwarizmîs Werke auftritt und ähnlich bei griechischen Schriftstellern uns nicht bekannt ist“. Die geschichtliche Bedeutung des Abschnitts wird sofort eine wesentlich andere, wenn man diesem Satze die bestimmtere Form gibt: „Durchaus indisch ist nach Inhalt und Form das Kapitel von den Geschäften“, und wenn man sich vergegenwärtigt, daß hier die Möglichkeit vorliegt, Muḥammad b. Mūsās Arbeitsweise und persönliches Verdienst um die Popularisierung des indischen Rechnens an einem einwandfreien Beispiel zu prüfen.

Griechische Herkunft des Kapitels ist ausgeschlossen: die ganze mathematische Überlieferung weiß nichts von Aufgaben nach einer Regeldetri trotz hoher Ausbildung der Lehre von den Proportionen.[1] Erst spät, um die Mitte des 14. Jahrhunderts, tauchen bei Nikolaus Rhabdas von Smyrna Aufgaben über „politische Arithmetik“, d. i. bürgerliches Rechnen auf, die mittels Regeldetri gelöst sind.[2] Noch später — in das 15. Jahrhundert — sind die von J. L. Heiberg[3] veröffentlichten byzantinischen Texte zu setzen, in denen wir den Ausspruch finden: ἡ δὲ τῶν τριῶν μέθοδος ὁ τῆς λογιστικῆς μάντις ἐστί, καθὼς φησιν ὁ παλαιὸς λόγος. Wie alt dieses „Wort“ auch sein mag, es ist sicherlich eher arabischen oder italienischen als griechischen Ursprungs. Auch das von Hultsch[4] beigebrachte Scholion zu Platons Charmides 165 E, in dem „schließlich“ als Zweck der Logistik angegeben wird, daß sie den Bedürfnissen des Alltagslebens diene, um brauchbare Verträge über Mein und Dein, über Soll und Haben, über Erbschaftsteilungen usw. abzuschließen, schlägt der im Charmides selbst gegebenen rein theoretischen Definition οἷον ἡ λογιστική ἐστίν που τοῦ ἀρτίου καὶ τοῦ περιττοῦ πλήθους ὅπως ἔχει πρὸς αὑτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα (ed. Schanz, VI^2, S. 17) ins Gesicht, und beweist nichts für Anwendung der Regeldetri.

Im Gegensatz zu dem Versagen griechischer Überlieferung hinsichtlich der Regeldetri können wir bei den Indern eine nicht ab-

[1] Vgl. auch Tropfke, Gesch. d. Elementarmath. I, Leipzig 1902, S. 97.

[2] P. Tannery, Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas, Notices et extraits des Manuscr. de la Bibl. nat. XXXII^1, Paris 1886, S. 121 ff.; Cantor, I^3, S. 514.

[3] J. L. Heiberg, Byzantinische Analekten, in Abhandl. z. Gesch. d. Math., 9. Heft, 1899, S. 167.

[4] Pauly-Wissowa, Realenzyklopädie, Bd. V, Sp. 1054; vgl. auch P. Tannery, a. a. O., S. 123.

brechende, nach Form und Bezeichnungsweise feste Überlieferungskette von Āryabhatta im 5. bis zu Bhāskara im 12. Jahrhundert verfolgen. Unter den äußerst knapp gehaltenen Regeln, die Rodet in seinen Leçons de calcul d'Âryabhata[1] übersetzt hat, findet sich die folgende:

> XXVI. Dans la «règle de trois», le «résultat» (ou «fruit» *phalam*) multiplié par la «demande» et divisé par le «type» donne le «résultat de la demande».

Die Sanskritworte umschreibt und übersetzt Rodet mit *trairâçikam* = règle de trois; *phalam* = fruit, résultat, revenu; *icchâ* = demande, quantité pour laquelle on demande, *pramâna* = type, quantité type[2]; dazu kommt *icchâpala* = résultat de la demande[3].

Ganz denselben Ausdrücken begegnen wir bei Brahmagupta in der ersten Hälfte des 7. Jahrhunderts; der Wortlaut der Regel ist nach Colebrooke a. a. O., S. 283:

> 10. In the rule of three, argument, fruit and requisition [Zusatz des Übersetzers „are names of the terms"]: the first and last terms must be similar. *Requisition*, multiplied by the *fruit*, and divided by the *argument*, is the *produce*.

Ein Kommentator fügt hinzu, daß der mittlere Term anders (dissimilar) benannt ist und daß die Regel sich auf ganze Zahlen bezieht; wenn Brüche vorkommen, sollen sie alle auf denselben Nenner gebracht werden. Als Beispiel wird von ihm gegeben: Jemand gibt weg 108 Kühe in 3 Tagen; wieviel Kühe bringt er fort in einem Jahr und einem Monat?

Feststellung: Tage 3. Kühe 108. Tage 390.
Antwort: Kühe 14040.

Hieran schließt sich S. 284 die Regel für umgekehrtes Verhältnis und für mehr als 3 gegebene Größen:

> 11. In the inverse rule of three terms, the product of argument and fruit, being divided by the demand, is the answer.
>
> 11—12. In the case of [three or] more uneven terms, up to eleven, transition of the fruit takes place on both sides.

[1] Journ. asiat., 7. Série, Bd. 13, 1879, S. 402.
[2] Rodet, L'algèbre d'Al-Khârizmi, Journ. as., 7. Série, Bd. 11, S. 47.
[3] Dies nach Colebrooke, Algebra with Arithmetic and Mensuration, S. 33.

Der Kommentator bemerkt, daß der Fall mit 3 Termen auszuschließen sei, weil er schon in der Hauptregel behandelt ist, und daß die Regel die Fälle mit 5, 7, 9, 11 Termen ins Auge fasse; auch gibt er weitere Beispiele.

Aus der Mitte des 9. Jahrhunderts ist ein mathematisches Werk von Mahāvīra erhalten, das im fünften Kapitel von der einfachen und zusammengesetzten, direkten und inversen Regeldetri handelt und Anwendungen auf Zinsrechnung, Handel und Messungen (mensuration) enthält.[1]

Die ausgiebigste Behandlung der Regel finden wir bei Bhāskara und seinen Kommentatoren; ich teile auch hier den Text nach der Übersetzung von Colebrooke (a. a. O., S. 33) mit:

> 70. Rule of three terms. The first and last terms, which are the *argument* and *requisition*, must be of like denomination; the *fruit*, which is of a different species, stands between them: and that, being multiplied by the demand (d. i. *requisition*) and divided by the first term, gives the *fruit of the demand*. In the inverse method, the operation is reversed.

In den Beispielen werden die gegebenen Zahlen einfach nebeneinander gesetzt; die beiden ersten lauten in deutscher Übersetzung:

> 71. Wenn man $2\frac{1}{2}$ *palas* Safran für $\frac{3}{7}$ *nishca* erhält: sage sofort, trefflichster Kaufmann, wieviel Safran man für 9 *nishcas* erhält?
>
> Feststellung: $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{1}$. Antwort: 52 *palas* und 2 *carshas*.
>
> 72. Wenn man 104 *nishcas* für 63 *palas* besten Kampfers erhält, so überlege und sage mir, mein Freund, was man für $12\frac{1}{4}$ *palas* bekommt?
>
> Feststellung: $63 \cdot 104 \cdot \frac{49}{4}$. Antwort: 20 *nishcas*, 3 *drammas*, 8 *pańas*, 3 *cácinís*, 11 Kaurischalen und $\frac{1}{9}$ Teil.

Die Regeln über die umgekehrte und zusammengesetzte Regeldetri lauten nach Colebrooke:

> 74. Rule of three inverse: If the fruit diminish as the requisition increases, or augment as that decreases, they, who are skilled in accounts, consider the rule of three terms to be inverted.

[1] D. E. Smith, Bibl. Math., 3. Folge, Bd. 9, 1908/09, S. 108.

> 79. Rule of compound proportion. In the method of five, seven, nine or more terms, transpose the fruit and divisors; and the product of multiplication of the larger set of terms, being divided by the product of the less set of terms, the quotient is the produce.

Es erübrigt sich, auf die manchmal schon recht verwickelten Beispiele bei dem drei Jahrhunderte nach Muḥammad b. Mūsā schreibenden Bhāskara einzugehen. Die Regeln selbst werden zwar etwas ausführlicher, bleiben aber wie immer bei den Indern reine Rechenrezepte. Die Fachausdrücke bedürfen besonders deshalb einer näheren Erläuterung, weil nach ihnen die arabischen gebildet worden sind.

Die Ausdrucksweise wird sich für das Deutsche ändern, je nachdem wir eine Zins- oder eine Warenrechnung zugrunde legen. Bei einer Zinsrechnung heißt es z. B.: „Was trägt ein Kapital von 3500 Mk., wenn 100 Mk. 4 Mk. Zins tragen?“ Hier ist die Zahl 100 = *prâmana, le type, the argument,* also die Norm, das Grundkapital; die Zahl 4 = *phalam, le résultat, le revenu, the fruit,* also sein Erträgnis — wir sagen genau wie vom Baume oder Acker, daß das Kapital Zinsen „trägt“. Die Zahl 3500 ist *icchâ, la demande, the requisition,* für uns das Kapital; die gesuchte Zahl ist also *icchâpala, le résultat de la demande,* für uns der Zins, das Erträgnis des Kapitals. Bei Warenrechnungen werden wir *prâmana* mit Grundmenge oder Grundmaß, *phalam* mit Grundpreis oder Grundwert, *icchâ* mit Angebot oder Gesamtmenge, *icchâpala* mit Gesamtpreis oder Gesamtwert übersetzen können, da es sich meist darum handeln wird, aus dem für eine kleinere Menge gegebenen Marktpreis den Betrag für eine größere Menge zu berechnen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns dem Kapitel von den Geschäften in Muḥammad b. Mūsās Algebra zuwenden. Es ist notwendig, Text und Übersetzung Rosens wiederzugeben, um über die darin enthaltenen Versehen zur Klarheit zu kommen. Der theoretische Teil des Kapitels lautet wie folgt (Rosen, S. 48):

باب المعاملات ✿ اعلم ان معاملات الناس كلها فمن البيع والشرى والصرف والاجارة وغير ذلك على وجهين باربعة اعداد يلفظ بها السائل وهى المسعر والسعر والثمن والمثمن[1] فالعدد الذى هو المسعر مبائن

[1] Lies والمثمن والثمن. Natürlich könnte man auch vorher السعر والمسعر umstellen.

للعدد الذى هو المثمن[2] والعدد الذى هو السعر مبائن للعدد الذى هو الثمن[3] وهذه الاربعة الاعداد ثلثة منها ابدا ظاهرة معلومة وواحد منها مجهول وهو الذى فى قول القائل كم وعنه يسأل السائل ✿ والقياس فى ذلك ان تنظر الى الثلثة الاعداد الظاهرة فلا بد ان يكون منها اثنان كل واحد منهما مبائن لصاحبه فتضرب العددين الظاهرين المتبائنين كل واحد منهما فى صاحبه فما بلغ فاقسمه على العدد الاخر الظاهر الذى مبائنه مجهول فما خرج لك فهو العدد المجهول الذى يسأل عنه السائل فهو مبائن للعدد الذى قسمت عليه ✿

Nach der Übersetzung von Rosen (S. 68): „On mercantile transactions. You know that all mercantile transactions of people, such as buying and selling, exchange and hire, comprehend always two notions and four numbers, which are stated by the enquirer; namely, *measure* and *price,* und *quantity* and *sum.* The number which expresses the measure, is *inversely proportionate* to the number which expresses the sum, and the number of the price inversely proportionate to that of the quantity. Three of these four numbers are always known, one is unknown, and this is implied when the person inquiring says «how much?» and it is the object of the question. — The computation in such instances is this, that you try the three given numbers; two of them must necessarily be inversely proportionate the one to the other. Then you multiply these two proportionate numbers by each other, and you divide the product by the third given number, the proportionate of which is unknown. The quotient of this division is the unknown number, which the inquirer asked for; and it is inversely proportionate to the divisor.“

Die Worte des Textes, die den ersten vier kursivgedruckten Worten der Übersetzung entsprechen, sind:

1. المسعر, *almusaʿʿar = the measure*
2. السعر, *alsiʿr = the price*
3. الثمن, *alṯaman = the quantity*
4. المثمن, *almuṯamman = the sum.*

Auch wer des Arabischen unkundig ist, erkennt aus der Umschreibung, daß im Arabischen Wortpaare vorliegen, die von der

[2] Lies الثمن. — [3] Lies المثمن.

gleichen Wurzel gebildet sind, während Rosen vier verschiedene und dabei recht unbestimmte Ausdrücke zur Übersetzung verwendet. Das ist schon ein methodischer Mißgriff; dazu kommt aber noch, daß die Ausdrücke 3. und 4. im arabischen Text falsch gestellt sind, wenn wir die Übersetzung anerkennen, oder umgekehrt, daß Rosens Übersetzung falsch ist, wenn wir den Text gelten lassen.

Um zum Verständnis der Ausdrücke zu gelangen, müssen wir von *siʿr* und *ṯaman* ausgehen. Wenn wir *alsiʿr* mit „die Schätzung" übersetzen, so ist *almusaʿʿar* „das Geschätzte", die geschätzte Ware[1]; in gleicher Weise ist nach *alṯáman* „der Wert" das Partizipium *almuṯamman* „das Gewertete" gebildet. Wir müssen also *alṯaman* = *the sum*, *almuṯamman* = *the quantity* setzen. Die Worte *musaʿʿar* und *siʿr* geben in freier, dem arabischen Sprachgeist angepaßter Weise das indische *prâmana* (argument) und *phalam* (fruit) wieder, während in *muṯamman* und *ṯaman* die Äquivalente von *icchá* (demand) und *icchápala* (fruit of the demand) vorliegen. Vom mathematischen Standpunkt ist darin, daß die arabische Bezeichnung schon grammatisch die Gleichartigkeit der Größen in *musaʿʿar* und *muṯamman* einerseits, *siʿr* und *ṯaman* andererseits zum Ausdruck bringt — wir würden die Worte „Ware" und „Preis" über den Ansatz stellen —, ein terminologischer Fortschritt zu erblicken; der Inder muß ausdrücklich bemerken, daß «*argument* and *requisition* must be of *like denomination*; the fruit, which is of a different species, *stands between them*».

Von irgendeiner Anspielung auf die griechische Lehre von den Proportionen ist bei Muḥammad b. Mūsā weder im Kapitel von den Geschäften noch sonstwo das geringste zu lesen. Damit wird auch Rosens kühner Versuch hinfällig, das Wort مبائن *mubāʾin* mit *inversely proportionate* zu übersetzen. Wir müssen bei der Grundbedeutung „abgesondert, getrennt" oder der sich daraus leicht ergebenden Bedeutung „sich gegenüberstehend" stehenbleiben, also wie es bei dem soeben angeführten indischen Zitat der Fall ist, nur den rein äußerlichen Gesichtspunkt der Anordnung der vier Zahlen im Rechenschema bei der Übersetzung im Auge haben. Das Wort ist weiter nichts als ein Synonym zu dem Partizip مقابل *muḳābil* „entgegengesetzt", das uns an die مقابلة *muḳābalah*, oppositio erinnert. Auch der Ausdruck *two notions* am Anfang der Übersetzung

[1] Der مسعّر *musaʿʿir* ist der „inspecteur des poids et mesures" und تسعير(ة) *tasʿīr* oder *tasʿīrah* ist das „règlement pour le prix des denrées" (Dozy s. v.).

ist irreführend. Muḥammad b. Mūsā spricht nicht von zwei Begriffen, sondern von وجهين d. i. zwei „Gesichtspunkten" und meint damit — wie aus einem der Beispiele klar hervorgeht —, daß entweder nach dem „Wert" oder nach dem „Gewerteten" gefragt sein kann.

Legt man bei der Wiedergabe des Arabischen mehr Gewicht auf photographische Treue, als auf elegantes Umschiffen von Klippen und Schwierigkeiten, so wäre der Text etwa wie folgt zu übersetzen: —

„Wisse, daß die Geschäfte der Menschen — sie (gehören) alle zu dem Kauf und dem Verkauf und dem Austausch und der Miete und anderem dergleichen nach zwei Gesichtspunkten mit vier Zahlen, welche der Fragende ausspricht, nämlich dem *Geschätzten* und der *Schätzung* und dem *Gewerteten* und dem *Wert*. Die Zahl, die das Geschätzte ist, steht gegenüber der Zahl, die der Wert ist, und die Zahl, die die Schätzung ist, steht gegenüber der Zahl, die das Gewertete ist. Und diese vier Zahlen, drei von ihnen sind stets offenkundig, bekannt, und eine von ihnen verborgen, und das ist die, welche in der Rede des Redenden[1] *wieviel* (heißt) und nach welcher der Fragende fragt.

Und die Regel in diesem (ist), daß du schaust auf die drei offenkundigen Zahlen, so ist kein Ausweg, als daß zwei von ihnen, eine jede von beiden gegenüberstehend (sind) ihrem Gefährten; so multipliziere die beiden offenkundigen gegenüberstehenden Zahlen, eine jede von ihnen beiden mit ihrem Gefährten, und was sich ergibt, das teile mit der letzten offenkundigen Zahl, deren Gegenüber unbekannt (ist); und was dir herauskommt, das ist die unbekannte Zahl, nach welcher der Fragende fragt, und sie steht gegenüber der Zahl, mit der du geteilt hast."

Die Verwechslung von ثمن und مثمن findet sich nur im einleitenden Teil; es wird daher genügen, die nun folgenden Aufgaben ohne Wiederholung des arabischen Textes in genauer deutscher Übersetzung mitzuteilen. Es sind die folgenden:

I. Und Beispiele dafür unter einem Gesichtspunkt davon sind: Wenn gesagt wird 'Dir 10 um 6, wieviel dir um 4?' so ist sein Wort 10 die geschätzte Zahl, und sein Wort 'um 6'

[1] Auch hier ist في قول القائل „in loquela loquentis" keine *regula sermonis.*

ist die Schätzung und sein Wort ‘wieviel dir’ die unbekannte ist gewertete Zahl und sein Wort ‘um 4’ ist die Zahl, die der Wert ist. Nun steht die geschätzte Zahl, nämlich 10, gegenüber der Zahl, die der Wert ist, nämlich 4; multipliziere also die 10 in die 4, und beide sind die gegenüberstehenden offenkundigen, dann gibt es 40; teile sie nun durch die letzte offenkundige Zahl, die die Schätzung ist, nämlich 6, so gibt es $6^2/_3$, und das ist die unbekannte Zahl, die in dem Worte „wieviel“ steckt, und das ist das Gewertete, und sein Gegenüber ist die 6, die die Schätzung ist.

II. Und der zweite Gesichtspunkt ist das Wort dessen, der sagt ‘10 um 8, um wieviel des Werts 4?’ und manchmal sagt einer ‘vier von ihnen, wieviel ihr Wert?’ Die 10 nun sind die geschätzte Zahl und die steht gegenüber der Zahl, die der unbekannte Wert ist, der in seinem Wort ‘wieviel’, und die 8 ist die Zahl, die die Schätzung ist, und diese steht gegenüber der offenkundigen, die das Gewertete ist, nämlich 4; so multipliziere die beiden gegenüberstehenden offenkundigen Zahlen eine in die andere, nämlich 4 in 8, so gibt es 32, und teile sie in die letzte offenkundige Zahl, die die geschätzte ist, nämlich 10, so gibt es $3^1/_5$, und das ist die Zahl, die der Wert ist, und sie steht gegenüber den 10, durch (über!) die du geteilt hast. Und so (sind) alle Geschäfte der Leute und ihre Regel, so Gott d. E. will.

III. Und wenn ein Fragender fragt und sagt: Ein Taglöhner, den ich gemietet im Monat für 10 Dirhem, arbeitet 6 Tage, wieviel ist sein Anteil? so weißt du, daß 6 Tage $^1/_5$ des Monats und daß, was sein Anteil von den Dirhem ist, (sich berechnet) gemäß dem, was er von einem Monat gearbeitet hat. Und die Regel dafür ist, daß sein Wort ‘Monat’ 30 Tage (ausmacht), und das ist das Geschätzte, und sein Wort ‘10 Dirhem’ ist die Schätzung und sein Wort ‘6 Tage’ ist das Gewertete und sein Wort ‘wieviel ist sein Anteil’ ist der Wert. So multipliziere die Schätzung, nämlich 10, in das Gewertete, das ihm gegenübersteht, nämlich 6, das gibt 60, und teile es durch die 30, die die (letzte) offenkundige Zahl sind, so ist das das Geschätzte; das gibt 2 Dirhem, und das ist der Wert. Und das ist, was die Leute untereinander verhandeln vom Austausch und vom Maß und vom Gewicht.

Es verlohnt sich, noch einen Blick in die lateinische Übersetzung des Kapitels (Libri a. a. O., S. 286) zu werfen. Wir finden die kritischen Sätze am Anfang vollkommen einwandfrei mit folgenden Worten wiedergegeben: Scias quod conventiones negationis hominum sunt secundum *duos modos* cum quattuor numeris quibus interrogator loquitur. Qui sunt *pretium et appretiatum secundum positionem*, et *pretium et appretiatum secundum querentem.* Numerus vero qui est appretiatum secundum positionem *opponitur* numero qui est pretium secundum querentem . . . Ebenso später: ‘Horum vero quattuor numerorum tres semper *manifesti et noti*, et unus est *ignotus* . . .’ und ‘Impossible est enim quin duo eorum sint quorum unusquisque suo compari est *oppositus*’ . . . etc.

Wir sehen die frühere Beobachtung bestätigt, daß diese lateinische Übersetzung besser ist als Rosens Wiedergabe, ja wir können sogar wieder nachweisen, daß sie einen besseren Text wiedergibt, als ihn Rosen zur Verfügung hatte. Nicht nur, daß jene kritisch beanstandeten Stellen hier in ganz richtiger Folge wiedergegeben sind, auch der Text des ersten Beispiels zeigt eine Variante, die den Sinn der Aufgabe klarer wiedergibt. Denn es heißt hier nicht ‘10 um 6, wieviel um 4’, sondern ‘decem *cafficii* (قفيز *ḳafîz*, ein bekanntes Hohlmaß) sunt pro sex *dragmis*: quot ergo perveniet tibi pro quattuor *dragmis*?’.

Eine Vergleichung der indischen Regeln und Beispiele mit der Darstellung des Gegenstandes durch Muḥammad b. Mūsā zeigt neben aller Abhängigkeit — diese ist ganz besonders auch in dem Fehlen eines Beweises für das Verfahren zu erblicken — doch genug von persönlicher Eigenart. Der Araber faßt gleich alle vier Zahlen ins Auge und gruppiert sie paarweise, während die Inder die Regel nach den drei bekannten Zahlen benennen und die Stellung der mittleren zwischen zwei gleichbenannten besonders hervorheben; der Araber ahmt die indische Terminologie nicht sklavisch nach, sondern verbessert sie, indem er zwei Grundwörtern zwei abgeleitete gegenüberstellt. Aber er beschränkt sich in seinen drei breit ausgeführten, für den elementarsten Verstand faßbar gemachten Beispielen auf die einfache und direkte Regeldetri und bleibt dadurch wesentlich hinter den Indern zurück.

Unter den Abhandlungen der Iḫwān aṣ-ṣafā ist die sechste vollständig der Behandlung der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse gewidmet. Eine gewisse Übersicht ihres Inhalts gewinnt man aus der Übersetzung von Dieterici (a. a. O., S. 154—168); nur darf man sie nicht als Quellenschrift benützen. Der mathematische Inhalt ist wesentlich griechisch; von der Berechnung unbekannter Größen im Handel ist mehrfach die Rede (ed. Bombay I, S. 6, 11; Dieterici S. 159, 167), doch wird nur ثمن und مثمن unterschieden; der kennzeichnendste Satz lautet (a. a. O. S. 11):

كل سائل اذا سال عن ثمن شىء ما فلا بد له ان يلفظ باربعة
مقادير ثلثة منها معلومة وواحدة مجهولة وبين كل قدرين منها نسبتان
مستوية ومعكوسة ۞

„Jeder, der nach dem Preis irgend einer Sache frägt, muß notwendig vier Größen aussprechen, von denen drei bekannt sind und eine unbekannt ist; und zwischen je zwei Größen bestehen zwei Verhältnisse, ein direktes und ein umgekehrtes.“

Von der formalen Behandlung der Aufgaben, wie sie Muḥammad b. Mūsā nach indischem Vorbild in die arabische Mathematik einführte, sind bei Behā eddīn nur noch wenige Reste geblieben. Er steht in seinem Kapitel فى استخراج المجهولات بالاربعة المتناسبة „Über die Elimination der Unbekannten durch die vier proportionalen (Zahlen)“ ganz auf dem Boden der Lehre von den Proportionen. Nur in dem Beispiel, das offenbar der ersten Aufgabe bei Muḥammad b. Mūsā nachgebildet ist, begegnet uns auch noch dessen Terminologie:

لو قيل خمسة ارطال بثلثة دراهم رطلان بكم فخمسة ارطال المسعر[1] والثلثة السعر والرطلان المثمن[1] والمسئول عنه الثمن ونسبة المسعر الى السعر كنسبة المثمن الى الثمن فالمجهول الرابع فاقسم مسطح الوسطين وهو ستة على الاول وهو خمسة ۞

„Würde gesagt: ‘fünf Pfund und drei Dirhem, zwei Pfund um wieviel?’ so ist 5 Pfund das Geschätzte und 3 die Schätzung und die 2 Pfund das Gewertete, und das Gefragte ist der Wert, und das Verhältnis *(nisbah)* des Geschätzten zur Schätzung ist wie das Verhältnis des Gewerteten zum Wert; die Unbekannte ist die vierte (Zahl), teile also das Produkt (die Fläche) der beiden mittleren (Zahlen), nämlich 6, durch die erste, nämlich 5.“

Es überschreitet die mir gezogenen Grenzen, auch die Abhandlung Μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν des Nikolaus Rhabdas nach ihrer Herkunft genauer zu untersuchen. P. Tannery nennt sie (a. a. O. S. 136) „un morceau unique en grec“, ohne sich auf die Ursprungsfrage einzulassen. Die Unterscheidung der drei Fälle (S. 196/7) ist die indische, die Grundlagen der Schrift sind also entweder indisch oder arabisch-persisch (s. o. S. 40); wie weit der Verfasser in den Beispielen eine selbständige Leistung bietet, ist zur Zeit nicht zu entscheiden.

[1] Nesselmann vokalisiert الْمُسعَر und الْمُثَمَن; das erste ist falsch, das zweite mindestens ungewöhnlich. Er gibt die Termini durch das *Geschätzte*, der *Wert*, das *Gekaufte*, der *Preis* wieder.

XI. Aus dem Kapitel über die Messung.

Das Kapitel über die Messung hat Aristide Marre zuerst 1846 in den Nouvelles Annales de Mathématiques, Bd. 5, S. 557—570 nach Rosens Übersetzung, dann 1865 in den Annali di Matematica pura ed applicata Bd. 7, S. 269 «littéralement sur le texte arabe lui-même» ins Französische übersetzt. Ich beabsichtige nicht, diese drei Übersetzungen mit dem Original zu vergleichen[1], sondern beschränke mich auf terminologische Bemerkungen, die mir das Original selbst nahe legt. Vorher aber ist eine grundsätzliche Frage zu erledigen.

Cantor hat I³, S. 726 ff. über das Kapitel von den Messungen berichtet und bemerkt, daß es „unzweifelhaft wieder griechischen Quellen“ entstammt. Auch Hankel hat schon (a. a. O., S. 271) die Behauptung aufgestellt, daß in dem Kapitel nichts Indisches zu finden sei als der Wert $\sqrt{10}$ für π. Mit solchen Versicherungen ist aber nichts bewiesen. Es kommt doch vor allem auf die Frage an: Hat sich Muḥammad b. Mūsā bei der Ausarbeitung seiner Algebra griechischer oder indischer Quellen bedient? Müssen wir an schriftliche Darstellungen des Gegenstands denken, so daß also Muḥammad b. Mūsā entweder Sanskrit oder Griechisch zu lesen imstande war, oder ist an eine Vermittlung des Stoffs in lebendigem Gedankenaustausch zwischen ihm und gelehrten Indern oder Griechen am Hofe des Kalifen zu denken? Dürfen wir die nächste Quelle, die der Überlieferung nach doch indisch gewesen ist, einfach ausschalten, weil die elementaren Dinge, um die es sich in der Geometrie handelt, selbstverständlich auch griechisch sind?

Den Beweis für die griechische Herkunft des Kapitels sucht Cantor mit Hilfe einer quadratischen Figur zum pythagoreischen Lehrsatz zu führen, die als einzige Buchstaben an den Ecken und Schnittpunkten hat, und zwar „solche, die . . . ins Griechische übertragen eine richtige Reihenfolge der gewählten Buchstaben geben“. Die Korrektur ز für ر ist jedenfalls richtig, das Fehlen des و zeigt, daß es sich um Übertragung der Buchstaben des grie-

[1] Der erste Satz اعلم ان معنى واحد فى واحد انما هى مساحة ومعناه ذراع فى ذراع lautet wörtlich: „Wisse, daß der Sinn von ‘eins in eins’ nur (eine) Messung (ist), und sein Sinn ist ‘eine Elle in eine Elle’. Marre beanstandet Rosens Übersetzung *one by one is mensuration*, glaubt aber انما الى مساحة lesen zu müssen, um ‘un par un *appartient* au Messâhat’ übersetzen zu können. Die Änderung des Textes ist auf alle Fälle verfehlt, denn man kann arabisch nicht معنى واحد الى مساحة sagen; wohl aber kann man nach Bedarf auch „betrifft“ als Kopula einfügen.

chischen Alphabets handelt. Aber was beweist das für die übrigen Figuren? Diese müssen, da sie überall Längenbezeichnungen in indischen Ziffern tragen, nach demselben Grundsatz ebenso unzweifelhaft als indisch gelten. Denn das ist, wie ein Blick in Colebrookes Werk zeigt, spezifisch indische Methode. Es ist unverständlich, wie man diese Tatsache, die bis auf das genannte Quadrat für alle[1] Figuren gilt, als unerheblich bei Seite schieben konnte.

Wenn Muḥammad b. Mūsās Zahlenbeispiele fast durchweg einfacher sind als die der indischen Kommentatoren, so entspricht das unseren Beobachtungen bei dem Kapitel über die Regeldetri und stimmt mit dem Zweck der Popularisierung.[2] Manche Zahlenbeispiele sind identisch oder proportional mit indischen, obwohl kein Grund dagegen vorlag, beliebige andere Zahlen zu wählen; so das Rechteck mit den Seiten 6 und 8 (Rosen S. 76 = Colebrooke S. 75), der Rhombus mit den Diagonalen 6, 8 bzw. 30, 40 (Rosen S. 77 = Colebrooke S. 74).

Daß man bei Muḥammad b. Mūsā auch Dinge findet, die aus Heron und andern griechischen Quellen zu stammen scheinen, leugne ich natürlich nicht: aber der Beweis wird schwer zu führen sein, daß diese Teile nur direkt aus griechischer Quelle genommen werden konnten. Das wäre erst möglich, wenn wir über die indische Mathematik ebenso genau unterrichtet wären, als wir es über die griechische sind. Beobachtungen, die sich mir aus der Durchsicht des Textes der Messungen ergaben, bestätigen die aus äußeren Anzeichen gewonnene Überzeugung, daß das Kapitel mit seiner Auswahl von Berechnungsaufgaben in stärkerem Maße unter indischem Einfluß stand, als bisher geglaubt wurde. Ich betone aber auch diejenigen Momente, die Anklänge an Herons «Vermessungen» zu bieten scheinen.

Griechisch, nicht indisch, mutet außer dem Titel *bāb almisāḥah* die Einleitung an, in der von der Maßeinheit der Fläche gesprochen wird. Der Zweck des Satzes: وكل سطح مربع متساوى الاضلاع فان احد اضلاعه فى واحد جذره وفى اثنين جذراه صغر ذلك السطح او كثر

[1] Daß S. 62 der Kreis mit dem Durchmesser keine Zahl trägt, ist sicher Zufall; es müßte dort 7 und 22 stehen, wie in den entsprechenden Figuren bei Bhāskara (Colebrooke S. 88. 89).

[2] Ganz richtig bemerkt Marre (Annali di Matem. 1865, S. 274, Note ****) von Muḥammad b. Mūsā: il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire et non pour des mathématiciens.

«und jede viereckige Fläche gleich an Seiten (erg.: und Winkeln), siehe, eine ihrer *Seiten* in eins ist ihre *Wurzel*, und in zwei sind zwei ihrer Wurzeln, gleichviel ob diese Fläche klein oder groß ist» ist mir nicht klar geworden, es sei denn, daß hier der indische mit dem griechischen Ausdruck in Verbindung gesetzt werden sollte.

Das Wort معينة *muʿajjanah* oder معين *muʿajjan* für den Rhombus ist spezifisch arabisch und wird entweder von der Form des Auges oder der des Buchstabens ع abgeleitet.[1]

Über die drei Werte von π habe ich nichts zu dem hinzuzufügen, was bereits Rosen (Algebra, S. 198. 199), Marre (a. a. O., S. 272 Note *), Hankel (a. a. O., S. 216) und Cantor (I³, S. 728) gesagt haben. Dagegen möchte ich einer andern Stelle, die indischer Abkunft sein muß, einige Worte widmen. Sie lautet (S. 52):

وكل قطعة من مدورة مشبهة بقوس فلا بد ان يكون مثل نصف مدورة او اقل من نصف مدورة او اكثر من نصف مدورة والدليل على ذلك ان سهم القوس اذا كان مثل نصف الوتر فهى نصف مدورة سوا واذا كان اقل من نصف الوتر فهى اقل من نصف مدورة واذا كان السهم اكثر من نصف الوتر فهى اكثر من نصف مدورة ✿ واذا اردت ان تعرف من اى دائرة هى فاضرب نصف الوتر فى مثله واقسمه على السهم وزد ما خرج على السهم فما بلغ فهو قطر المدورة التى تلك القوس منها ✿ فان اردت ان تعرف تكسير القوس فاضرب نصف قطر المدورة فى نصف القوس واحفظ ما خرج ثم انقص سهم القوس من نصف قطر المدورة ان كانت القوس اقل من نصف مدورة وان كانت اكثر من نصف مدورة فانقص نصف قطر المدورة من سهم القوس ثم اضرب ما بقى فى نصف وتر القوس وانقصه مما حفظت ان كانت القوس اقل من نصف مدورة او زده عليه ان كانت القوس اكثر من نصف مدورة فما بلغ بعد الزيادة او النقصان فهو تكسير القوس ✿

[1] Der Satz اشتق اسمه من العين (van Vloten, Mafātīḥ al-olūm S. 206) kann beides heißen. Ich halte die zweite Übersetzung für zutreffender; da aber das ʿAin doch ursprünglich ein Umriß des Auges ist, steht auch der andern Auffassung nichts im Wege. Nach Wahrmund soll das Wort auch die 'Raute' im botanischen Sinne bezeichnen, die sonst حرمل *ḥarmal* heißt (Peganum harmala L.); da ich weder bei Löw noch sonst eine Bestätigung finde, stehe ich der Angabe sehr skeptisch gegenüber.

„Und jedes Stück einer Kreislinie ist ähnlich einem Bogen (قوس *ḳaus*), und es ist notwendig entweder gleich der Hälfte einer Kreislinie oder weniger als die Hälfte einer Kreislinie oder mehr als die Hälfte einer Kreislinie; und der Hinweis auf dies ist, daß der Pfeil (سهم *sahm*) des Bogens, wenn er gleich der Hälfte der Sehne (وتر *watar*) ist, dann ist es (das Stück) ebenfalls die Hälfte der Kreislinie; und wenn er weniger ist als die Hälfte der Sehne, so ist es weniger als die Hälfte der Kreislinie, und wenn der Pfeil mehr ist als die Hälfte des Bogens, so ist es mehr als die Hälfte der Kreislinie. — Und wenn du zu wissen wünschest, von welchem Kreis es ist, so multipliziere die Hälfte der Sehne mit sich selbst und teile es durch den Pfeil und vermehre, was herauskommt, um den Pfeil, so ist, was sich ergibt, der Durchmesser der Kreislinie, von der dieser Bogen ist. — Und wenn du zu wissen wünschest die Fläche (تكسير *taksīr*) des Bogens, so multipliziere die Hälfte des Durchmessers der Kreislinie in die Hälfte des Bogens und behalte, was herauskommt; dann zieh den Pfeil des Bogens von der Hälfte des Durchmessers der Kreislinie ab, wenn der Kreis weniger ist als die Hälfte einer Kreislinie, und wenn er mehr ist als die Hälfte einer Kreislinie, so ziehe die Hälfte des Durchmessers der Kreislinie von dem Pfeil des Bogens ab. Hierauf multipliziere, was bleibt, mit der Hälfte der Sehne des Bogens und zieh es ab von dem, was du behalten hast, wenn der Bogen weniger ist als die Hälfte einer Kreislinie, oder füge es ihm hinzu, wenn der Bogen mehr ist als die Hälfte einer Kreislinie. Was nach der Hinzufügung oder Wegnahme (بعد الزيادة او النقصان *ba'da 'lzijādati awi 'lnukṣāni* vgl. S. 15) sich ergibt, das ist die Fläche des Bogens."

Die griechische Geometrie weiß nichts von Bogen, Pfeil und Sehne. Der «Bogen» heißt περιφέρεια, die «Sehne» ἡ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα oder εὐθεῖα ἐλάττων τοῦ διαμέτρου, der «Pfeil» κάθετος τμήματος κύκλου. Wohl aber begegnen wir den drei zusammengehörigen Begriffen in engster Verbindung mit der ersten Regel sowohl bei Brāhmagupta (Colebrooke S. 309) wie bei Bhāskara (ebenda S. 89). Die Kommentare zu Bhāskara erklären (S. 89 N. 4): A portion of the circumference is a bow. The right line between its extremities, like the string of a bow, is its chord. The line between them is the arrow, as resembling one set on a bow. Für «Bogen» werden *dhanush*, *chápa* und andere Synonyma gebraucht, für «Sehne» *jívá*, *jyá*, *jyacá*, *guṅa*, *maurví* und andere Synonyma der Bogensehne, für «Pfeil» *śara*, *ishu* usw. Die von Muḥammad

b. Mūsā für den Kreisdurchmesser gegebene Formel würde in unserer Schreibweise, wenn *s* die Sehne, *p* den Pfeil und *d* den Durchmesser bezeichnet, die Gestalt

$$\text{(I)}\quad \frac{s^2}{4p} + p = d$$

erhalten. Sie findet sich bei Brāhmagupta[1] und Bhāskara auch nach s und p aufgelöst in den Formen

$$\text{(II)}\quad s = \sqrt{(d-p)\,4p}$$

$$\text{(III)}\quad p = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - s^2} \text{ oder } p = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(d+s)(d-s)}.$$

Einen Beweis finden wir weder bei den Indern noch bei Muḥammad b. Mūsā; er ergibt sich leicht aus dem Ansatz

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2 = pd$$

mit Hilfe des Quadrats der Sehne des halben Winkels.

Die zweite Regel (für die Fläche des Kreisabschnitts) lautet in unsere Zeichen übertragen (mit *b* für den Bogen):

$$F = \frac{d}{2}\cdot\frac{b}{2} - \left(\frac{d}{2} - p\right)\frac{s}{2} \text{ oder } \frac{d}{2}\cdot\frac{b}{2} + \left(p - \frac{d}{2}\right)\frac{s}{2}.$$

Man könnte sich verleiten lassen, aus dem Fehlen dieser Formeln bei Brāhmagupta und Bhāskara und der umständlichen Unterscheidung der zwei Fälle auf eine griechische Quelle zu schließen. Aber ich möchte nicht zu behaupten wagen, daß die Inder, die die Trigonometrie ausbauten, nicht auch gewußt haben sollten, wie man einen Kreisabschnitt als Differenz oder Summe des Sektors und des aus der Sehne und zwei Radien gebildeten Dreiecks findet.

Ein seltsamer Widerspruch besteht zwischen Text und Figur für die Berechnung des Parallelogramms. Der Text sagt, daß das rautenähnliche Viereck wie die Raute, also aus den 2 Diagonalen,

[1] Colebrooke S. 309/10: „In a circle the chord is the square-root of the diameter less the arrow taken into the arrow and multiplied by four. The square of the chord divided by four times the arrow, and added to the arrow, is the diameter. Half the difference of the diameter and the root extracted from the difference of the squares of the diameter and the chord is the smaller arrow." Bei Bhāskara S. 89 ist die Regel III in der zweiten Form an den Anfang gestellt.

berechnet wird; die zugehörige Figur[1] ist ein Parallelogramm, das durch zwei Höhenlinien aus den stumpfen Winkeln in ein Rechteck und 2 Dreiecke zerlegt wird. Diese Dreiteilung findet sich für den allgemeineren Fall eines Paralleltrapezes auch bei Bhāskara (Colebrooke S. 75, Figur 3); im übrigen entspricht die Einteilung der Vierecke durchaus der griechischen, nicht der indischen Art der Unterscheidung, wie schon Cantor (I^3, S. 727) hervorhebt.

Das sogenannte heronische Dreieck mit den Seiten 15, 14, 13 (Text S. 59, Übersetzung S. 80 ff.) ist mathematisches Gemeingut. Es wird sich also nie mit Bestimmtheit sagen lassen, ob es Muḥammad b. Mūsā indischer oder griechischer Quelle entnommen hat. Die ausführliche Berechnung der Höhe und des Inhalts ist weder griechisch noch indisch, sondern ganz und gar die Art des arabischen Verfassers. Wer die Fläche des Dreiecks berechnen will, muß zuerst seine Höhe (عمود *ʿamūd*) und den „Fallort seines Steines“ (مسقط حجرها *masḳiṭu ḥaǵarihā*) kennen. Dieser Punkt, den Rosen als „the point from which the line representing the height does arise“ bezeichnet, liegt auf der Basis (القاعدة *alḳāʿidah*) in einer gewissen Entfernung (*ʿalā šaiʾin* gemäß einem ‘Etwas’) von einer der beiden (andern) Seiten (ضلعين *ḍilʿain*) des Dreiecks. Nimmt man 14 als Basis und 13 als benachbarte Seite, so wird das ‘Etwas’ mit sich selbst multipliziert ein Quadrat (*māl*). Ziehen wir es von $13 \cdot 13 = 169$ ab, so wissen wir, daß die Wurzel aus $169 - x^2$ die Höhe ist. Nun sind uns von der Basis $14 - x$ geblieben. Dies gibt mit sich selbst multipliziert $196 + x^2 - 28x$; das subtrahieren wir von $15 \cdot 15$, so bleiben 29 [Dirhem] und $28x - x^2$, und die Wurzel daraus ist ebenfalls die Höhe. Da wir also wissen, daß die beiden Wurzeln einander gleich sind, so gleiche beide aus, indem du die Quadrate wegläßt, weil sie beide subtraktiv sind; dann bleiben $29 + 28x = 169$, und wenn man 29 (beiderseits) weg nimmt, bleibt $28x = 140$, also ist $x = 5$. Das ist der masḳiṭ alḥaǵar (Rosen: the distance of the said point), der der Seite 13 benachbart ist, und die Vervollständigung (تمام *tamām*) der Basis nach der andern Seite hin ist 9. Um die Höhe zu berechnen, multipliziert man 5 mit sich selbst und subtrahiert es von dem Quadrat der benachbarten Seite, nämlich 13, dann ist die Wurzel aus 144, also 12, die Höhe. Sie heißt *ʿamūd* (Säule), weil sie stets

[1] Sie ist samt dem Satz وهذه صورة المشبهة بالمعينة an eine falsche Stelle geraten, doch mögen typographische Gründe dazu Anlaß gegeben haben. In der englischen Übersetzung ist die Anordnung richtig.

senkrecht auf der Basis steht; das Produkt der halben Basis 7 in die Höhe 12 gibt den Inhalt 84.

Ich habe den Ausdruck *masḳiṭ alḥaǵar* zunächst ganz wörtlich mit „Fallort des Steines“ wiedergegeben. Dieterici übersetzt zutreffend „Fallort des Lotes“, wir würden „Fußpunkt des Lotes“ sagen. Wir sehen aber den Ausdruck auch für die Abschnitte der Basis (die *segments* der indischen Texte) verwendet, also für die Projektionen der Seiten auf die Basis. Das ist natürlich das Vorbild für das „eigentümlich auftretende Wort *casus*“, das von Cantor II^1, S. 37 in zweierlei Anwendung erwähnt wird.

Über den Rest des Kapitels ist nichts weiter zu sagen, als daß die Berechnung der abgestumpften Pyramide insofern wieder „griechisch“ zu sein scheint, als sie in den bisher veröffentlichten indischen Texten, soweit mir bekannt, nicht behandelt wird, und daß die bei Heron vorkommende Aufgabe, ein Quadrat in das gleichschenklige Dreieck 10, 10, 12 einzulegen, von Muḥammad b. Mūsā mit ähnlicher elementarer Breite vorgerechnet wird, wie der Inhalt des heronischen Dreiecks.

XII. Muḥammad b. Mūsās Algebra als Teil seiner wissenschaftlichen Gesamtleistung.

Unser kritischer Streifzug durch die verschiedenen Teile der Algebra hat im ganzen bestätigt, was Muḥammad b. Mūsā selbst über Inhalt und Zweck seines Werkes in der Einleitung angibt. Jedenfalls hat man kein Recht, sich über die dort ausgesprochenen Absichten des Verfassers wegzusetzen und nach unsern Maßstäben zu beurteilen, nach unserm Geschmack auszuwählen, was nur aus den Zeitumständen richtig eingeschätzt werden kann. Auch wird man künftig nicht mehr sagen dürfen, das Buch sei nur für Fachleute bestimmt gewesen, wenn der Verfasser selbst den gemeinverständlichen Charakter seiner Schrift betont.

Die terminologischen Untersuchungen in dem algebraischen Abschnitt des Werkes und die Vergleichung der Kapitel von den Geschäften und von der Messung mit indischen Quellen haben übereinstimmend zu dem Ergebnis geführt, daß der Beitrag, den die indische Mathematik als nächste Quelle geliefert hat, doch erheblich größer ist, als gemeinhin angenommen wird. Von griechischen Vorbildern, sei es unmittelbar oder durch Vermittlung des Syrischen, sind die mit Buchstaben bezeichneten Figuren abzuleiten, wobei ich unentschieden lassen muß, ob nur die Sitte, geometrische Figuren mit Buchstaben zu bezeichnen, oder auch wesentliche Teile des zugehörigen Textes griechischen Vorlagen entnommen sind. Es bleibt nur noch die Frage, ob die Anwendung der Algebra auf die Lösung von Erbteilungsaufgaben vielleicht das besondere Verdienst Muḥammad b. Mūsās ist, oder ob er auch hierin schon gebahnten Wegen folgte. Wir wissen bereits, daß er sich wiederholt auf Abū Ḥanīfah beruft, und haben daher jene Stellen einer Prüfung zu unterziehen.

Die erste Gruppe findet sich in den Beispielen gegen Ende des Kapitels „Von der Freilassung in der Krankheit“. Hier werden offenbar nur Rechtsgrundsätze des Abū Ḥanīfah angezogen, so wenn es S. 113 heißt: فقول ابى حنيفة ان العتق اولى „der Ausspruch des Abū Ḥanīfah lautet, daß die Freilassung näher liegt (in erster Linie zu berücksichtigen ist)“, oder S. 114: فقياسة فى قول ابى حنيفة انه لا يضرب صاحب الجارية باكثر من الثلث فيكون الثلث بينهما نصفين „Und seine Auflösung (beruht) auf dem Ausspruch Abū Ḥanīfah's daß der (erste) Besitzer der Sklavin nicht mit mehr als einem Drittel belastet werden darf, und das Drittel zwischen beiden in zwei Hälften geht“ und ähnlich S. 115. Das Suffix in قياسة ist natürlich auf das vorangehende Beispiel und nicht auf Abū Ḥanīfah zu beziehen.

Die zweite Gruppe von Zitaten ist in dem Kapitel „Von der Vervollständigung“ enthalten. Muḥammad b. Mūsā beginnt die Lösung der ersten Aufgabe S. 116 mit den Worten: „Mache das Erste dessen, dem die Sklavin geschenkt wurde, gleich Etwas“. Diese Vorschrift wiederholt er bei den nächsten Aufgaben, bis es am Schluß einer solchen Rechnung in einer Nachschrift heißt (S. 117, Z. 3 v. u.): وفى قول ابى حنيفة تجعل الشىء وصية وما صار اليه بالعقر ايضا وصية „Und in (gemäß) dem Ausspruch des Abū Ḥanīfah machst du das Etwas zu einer Erbschaft, und was mit der Freilassung herauskommt, ebenfalls zu einer Erbschaft“. Gleich darauf lesen wir (S. 118, Z. 1): فان قول ابى حنيفة الثلث بينهما نصفان وقياسه ان تجعل الوصية . . . . شيئا „Es sagt Abū Ḥanīfah: Das Drittel (teile) zwischen beiden in zwei Hälften; und seine Auflösung ist, daß du die Erbschaft . . . Etwas nennst“ usw. Zuletzt (S. 118, Z. 6 v. u.) finden wir den Satz فان القياس فى قول ابى حنيفة ان تجعل الوصية شيئا فيبقى الث, den man übersetzen kann: „Die Auflösung liegt im Ausspruch des Abū Ḥanīfah, daß du die Erbschaft Etwas nennst“, aber gewiß richtiger übersetzen wird: „Die Auflösung im Sinne des Ausspruchs des Abū Ḥanīfah beruht darauf, daß du die Erbschaft Etwas nennst“ usw. So kann auch diese Stelle nicht zur Begründung der Vermutung dienen, daß Muḥammad b. Mūsā für seine Auflösungsmethoden nennenswerte Vorgänger gehabt habe.

Unentschieden bleibt bei der Unmöglichkeit, direkte Quellenschriften nachzuweisen, die Frage nach dem persönlichen Anteil des Verfassers an der arabischen Prägung der Algebra. Obgleich die Überlieferung in ihm einstimmig den ersten Verfasser einer arabischen Algebra sieht, ist doch auch die Möglichkeit erwogen worden, daß er die Terminologie schon fertig vorgefunden hätte. Insbesondere hat sich Cantor (I³, S. 722) auf Grund der Annahme, daß Muḥammad b. Musā die Ausdrücke *ǵabr* und *mukābalah* nirgends erklärt habe, dafür eingesetzt, „daß Alchwarizmî, mag er auch der erste arabische Schriftsteller über seinen Gegenstand gewesen sein, doch keinesfalls einen für seine Landsleute neuen Gegenstand behandelt, daß vielmehr durch mündliche Lehre schon bekannt gewesen sein muß, was Herstellung und was Gegenüberstellung sei“. Nachdem sich aber durch die oben (S. 7—10) durchgeführte Untersuchung die Irrtümlichkeit jener Annahme herausgestellt hat, läßt sich auch die Behauptung nicht mehr aufrecht erhalten, „die Einführung der Algebra müsse hinlänglich lange Zeit vor Alchwarizmî stattgefunden haben, um die Möglichkeit zu gewähren, daß jene Begriffe und die für dieselben erfundenen Kunstausdrücke unter den Fachleuten — denn für solche schrieb Alchwarizmî — schon landläufig geworden sein konnten.“ Für die Geschichte der Mathematik bei den Arabern ist jedenfalls nicht viel gewonnen, wenn man an die Stelle eines Mannes von Fleisch und Blut einen Unbekannten setzt, der die Terminologie ein paar Jahrzehnte früher geschaffen haben soll.

Daß Muḥammad b. Mūsā eine wissenschaftliche Persönlichkeit von starker Eigenart war, beweisen seine wirklich für „Fachleute“ verfaßten astronomischen und geographischen Werke, soweit sie uns ein glücklicher Zufall erhalten hat. Über seine astronomischen Tafeln sind wir jetzt durch das S. 85 genannte große Werk Suters unterrichtet. Welchen der verschiedenen indischen Siddhāntas Muḥammad b. Mūsā bei seinen Tafeln benutzt hat, ist nicht mehr sicher zu entscheiden; wahrscheinlich hat er, der geborene Perser, auch die persischen „Tafeln des Schah" zu Rate gezogen, die schon im 2. Jahrh. der Higra ins Arabische übersetzt wurden.[1] Neben diesen östlichen Quellen ist aber auch der Almagest des Ptolemaeus benützt, und damit sind die Nachrichten bestätigt, die Ibn al-Ḳifṭī in seiner Biographie Al-Fazārīs nach Ibn al-Adamī über die Grundlagen der Tafeln Al-Ḫwārazmīs gibt: „Er stützte sich in seinen Tafeln auf die mittleren Örter des *Sindhind*, wich aber von ihm ab in den Gleichungen (der Planeten) und in der Schiefe (der Ekliptik); er setzte seine Gleichungen fest nach der Methode der Perser, und die Deklination der Sonne nach der Methode des Ptolemaeus."[2]

Um die nähere Kenntnis eines von den arabischen Bibliographen nicht erwähnten, aber in der Literatur mehrfach nachweisbaren geographischen Tabellenwerkes, das die Straßburger Universitätsbibliothek besitzt, haben sich C. A. Nallino[3] und neuerdings H. v. Mžik[4] besondere Verdienste erworben. Das كتاب صورة الارض *kitāb ṣūrat alarḍ* ist der Begleittext zu einer Erdkarte, und zwar höchst wahrscheinlich zu dem großen Kartenwerk, das Alma'mūn durch eine Gesellschaft von Gelehrten herstellen ließ, die sich wohl aus allen Provinzen des Kalifats zusammenfanden. Es scheint die besondere Aufgabe des Astronomen Alḫwārazmī gewesen zu sein, den Inhalt des Kartenwerks in ähnlicher Weise in Buchform zu bringen, wie dies vorher Ptolemaeus für griechische Karten in der γεωγραφικὴ ὑφήγησις getan hatte. Das Werk bekundet eine Freiheit der Behandlung, wie man sie gegenüber dem Meister Ptolemaeus in jener Frühzeit der arabischen Wissenschaft zu finden nicht erwartet hätte.[5]

---

[1] Suter, Kommentar S. 32. Erst Maslama al-Magrīṭī (gest. 1007/8) hat die Ära Jezdegirds, die Muḥammad b. Mūsā seinen Tafeln zugrund gelegt hatte, durch die muhammedanische Ära ersetzt.

[2] Suter, Kommentar S. 33.

[3] C. A. Nallino, Al Ḫuwârizmî e il suo rifacimento della Geografia di Tolomeo. Atti della R. Accad. dei Lincei Anno CCXCI. Serie Quinta. Classe di Sc. Mor. Vol. II, Memorie, Roma 1896.

[4] Hans v. Mžik, Ptolemaeus und die Karten der arabischen Geographen (Mitt. d. k. k. geogr. Ges. in Wien, Bd. 58, 1915, S. 152). Derselbe, Afrika nach der arabischen Bearbeitung der γεωγραφικὴ ὑφήγησις des Claudius Ptolemaeus von Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī (Denkschr. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Philos.-hist. Klasse, Bd. 59, 1916, 4. Abh.).

[5] Einen Bericht über diese Untersuchungen habe ich in einem Aufsatz „Neue Bausteine zur Geschichte der arabischen Geographie" gegeben, der in der Geogr. Zeitschrift Bd. 23, 1917, veröffentlicht werden sollte, aber beim Abschluß des Druckes dieser Arbeit noch nicht erschienen ist.

So gewinnt das Bild, das wir von Muḥammad b. Mūsās wissenschaftlichem Lebenswerk erhalten, mehr und mehr an Inhalt. Wir sehen unsern Autor inmitten einer hochstrebenden, von allen Seiten wissenschaftliche Anregung suchenden und empfangenden Gelehrtenwelt, als Mitglied einer Akademie, die in der von Hārūn al Rašīd begründeten, von Alma'mūn freigebig geförderten Bibliothek zu Bagdad ihren geistigen Mittelpunkt hatte. In erster Linie Astronom und Astrolog, stützte sich der einem altpersischen Geschlecht[1] entstammende Gelehrte zunächst wohl auf persische und indische Überlieferung. Indische Werke über die mathematischen Hilfswissenschaften und persönlicher Verkehr mit indischen Astronomen mögen ihm die Anregung zur Abfassung der beiden Schriften über die indische Rechenkunst und über die wichtigsten Kapitel des angewandten Rechnens gegeben haben. Griechische Vorlagen kommen, falls überhaupt vorhanden, für die Algebra erst in zweiter Linie; eine originale Leistung scheint in dem Kapitel über die Erbteilungsaufgaben vorzuliegen.

Dieses aus der Untersuchung der Algebra und der übrigen Schriften Muḥammad b. Mūsās gewonnene Ergebnis steht durchaus im Einklang mit der Tatsache, daß sich die griechischen Quellen den Arabern erst im Laufe des 9. und 10. Jahrhunderts durch umfassende Übersetzertätigkeit erschlossen. Es ist unabhängig von der Wertschätzung, die man der indischen Mathematik an sich oder in ihrem Verhältnis zur griechischen Wissenschaft entgegenbringt. Wenn sich also G. R. Kaye in seiner neuesten Schrift[2] zu der Ansicht von Rodet bekennt, wonach die älteste arabische Algebra keine Spur von indischem Einfluß zeige und so gut wie vollständig griechisch sei, so dürfte diese Erneuerung älterer Ansichten durch die vorliegende Arbeit widerlegt sein. Wenn auch zugestanden werden kann, daß man im mittelalterlichen Europa keine klaren Vorstellungen über Indien hatte und der Titel „de

---

[1] Ein Hinweis hierauf ist der Beiname al-Maǧūsī, den ihm al-Ṭabarī gibt. Vgl. Nallino, a. a. O., S. 7. In dem Kapitel „Vita ed opere d'al-Ḫuwârizmî" sind die spärlichen Nachrichten, die wir über unsern Autor besitzen, sorgfältig gesammelt.

[2] G. R. Kaye, Indian Mathematics, Calcutta und Simla 1915, S. 41. Herr Wieleitner erhielt die Schrift im Juli 1917 durch Herrn Eneström und stellte sie mir in freundlicher Weise zur Verfügung. Die Aufsätze Kayes in Journ. & Proc. As. Soc. of Bengal 1907 und 1911 sind mir erst nach Abschluß der Korrektur zugänglich geworden; ich muß mir eine eingehendere Würdigung seiner Ergebnisse für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

numero Indorum" nichts beweise, so wird man doch nicht im Ernste behaupten wollen, daß die Gelehrten in Bagdad, die mit Indern und Griechen verkehrten und beiderlei Quellen benützten, nicht gewußt hätten, was indische, was griechische Rechenkunst und Zahlbezeichnung sei. Wie gewaltsam KAYE bisweilen mit unanfechtbaren geschichtlichen Tatsachen umgeht, zeigt seine Darstellung der oben S. 39 und 40 besprochenen Verwaltungsmaßregel des Kalifen Alwalīd in den Notes on Indian Mathematics (Journ. As. Soc. Bengal, Bd. 3, 1907, S. 491). Für ihn ist sie nur eine Anekdote; da die arabische Zahlbezeichnung mit Hilfe der Buchstaben des Alphabets genau dieselbe sei wie die griechische und nach BAYLEY unzweifelhaft ein hohes Alter besitze, könne sich das Edikt unmöglich auf die griechische alphabetische Ziffernschrift beziehen; es müsse entweder auf irgend eine besondere Zifferschrift, vielleicht auf die *apices* der Neupythagoreer, Bezug haben, oder die ganze Geschichte sei eine Erfindung. Daß die Geschichte mit den Urkunden im Einklang steht, ist oben ausreichend klargestellt worden. Man wird also gegenüber dem Übermaß von Kritik und Skepsis bei KAYE ebenso viel Vorsicht walten lassen müssen, wie gegenüber der oft allzu großen Vertrauensseligkeit bei älteren Autoren.

Nachtrag zu S. 91.

Das zahlenmystische Schlußkapitel der Algorismusschrift, die CANTOR in dem Aufsatz „Über einen Codex des Klosters Salem" in der Z. f. Math. u. Physik, Bd. 10, 1865, veröffentlicht hat, enthält S. 12 folgende Stelle:

Octavus propter octo beati(tu)dines non immerito sacratus judicatur, et quia Christus octava die resurrexisse creditur, et omnis resurrectio octava die a fidelibus futura expectatur etc.

Damit findet die Vermutung über den Ursprung der Bezeichnung beatificus octo eine einwandfreie Bestätigung.

Register.

I. Wort- und Sachregister.

Konsonanten mit diakritischen Zeichen sind zwischen die unbezeichneten in alphabetischer Folge eingereiht. Arabische Wörter sind mit oder ohne Artikel so angeführt, wie sie im Text auftreten. Verweisungen sollen das Auffinden erleichtern, wenn beide Fälle vorkommen oder bei Zitaten verschiedene Umschrift angewandt ist.

Abacisten 81, 86.
Abschreiber 43, 80, 81.
ʿadad kāmil 91.
ʿadad maǵḏūr 69.
ʿadad mufrad 8, 62.
ʿadad murabbaʿ 69.
ʿadad tāmm 91.
Addition 12, 16, 18, 20, 25, 63.
aḍlāʿ s. ḍilʿ.
Ägypten, Ägypter 36, 37, 40, 54.
aggregare, aggregatio 15, 16.
ʿaḳd, ʿuḳūd 71, 74, 79, 80, 81.
alʿaḳr 27.
albāḳī 20.
alcasal etc. 86.
alchamiza 83.
alḍarb 20, 25, 69.
aldimataser etc. 83.
Alexandria 31.
alfaṣl 82.
alǵabr, ǵabr 7, 10, 11, 12, 13, 14, 21, 53, 64.
alǵabr walmuḳābalah 5, 8, 10, 13, 14, 27, 32, 33, 47, 71, 72.
alǵamʿ s. ǵamʿ.
Algebra 3—7, 10, 13—17, 23—31, 35, 47, 49, 68, 69, 70, 72, 84, 111.
Algebraiker 13, 32.
Algorithmiker 4, 81.
Algoritmi de numero Indorum 4, 18, 19, 46, 55, 71.
alḥaḏf 82.
alhamsira etc. 83.
alhimech etc. 86.
alitmām 9, 82.
alḳā 20.
alḳismah 20.
Almagest 112.
almāl s. māl.
almuḳābalah 7, 10—14, 64, 82, 98.
almusaʿʿar 97, 98.
almuṯamman 97—99, 101.
ἄλογος 64.
Alphabet 37, 41—44.
alradd 11.
alsalam 27.
alsimāk alʿazal 86.
alsiʿr 97, 98.
altaḥlīl 21.
altakmilah 26.
alṯaman 97—99, 101.
alṭarḥ 20.
altarkīb 21.
alwacat 85.
amwāl s. māl.
ἀνάλυσις 21.
andras 83, 84, 88, 89, 90, 92.
ἀνδρός 84.
Anteil 51, 52.
ἀφελεῖν 11.
Aphroditofund 37, 38, 50.
Araber 3, 9, 12, 13, 29, 30, 32, 36, 37, 38, 47, 48, 59, 67, 69, 85, 86, 87.
arabice 86.

Arabische Algebra s. Algebra.
— Bruchzahlen 54, 55, 56.
— Meile 85.
— Namen der Stunden 83.
— — der Ziffern 85, 87.
— Ordinalzahlen 83.
— Rechtsschulen 49.
— Schrift 8, 37, 43, 105.
— Sprache 8, 11.
— Sternnamen 86.
— Urkunden 97 ff.
— Zahlbuchstaben 40—44, 114.
— Zahlwörter 40, 41, 75, 76, 85, 87, 90, 91.
Aramäische Bruchzahlen 54.
arbas 83, 88, 89, 90, 92.
Arithmetik 29, 35, 49, 71, 72.
ἀριθμητικά 11.
ἀριθμοὶ Περσικοί 45.
ἀριθμοστόν 69.
arrabea 83.
Arten von Zahlen 24.
articulus 79, 80, 81.
aṣamm 64.
aslama 27.
Assyrer 46, 84, 86.
Astrolab 82, 83, 86.
Astrologie 28, 33.
Astronomen, Astronomie 6, 12, 22, 28, 33, 46, 47, 70, 85, 111.
Astronomische Tafeln 47, 85, 111, 112.
atheliza etc. 83.
ἀθήλυντος 84.
athenia 83.
augorisme, augrim 4.
Ausgleichung 7, 9, 10, 11, 49.
Ausnahme 13.
Aussprechbare Brüche 54—56.
Averroismus 4.

Bāb alḍarb 25.
bāb alǵamʿ walnuḳṣān 16, 25.
bāb almuʿāmalāt 26, 92.
bāb altakmilah 26, 48.
Babylonier 32, 46, 85.
Basis 108, 109.
Bearbeiter, Bearbeitung 3, 46, 74.
Besitz 50, 56, 60.
Bogen 106.
Brahmanen 31.
Brüche 54 ff.
Bruchpotenzen 69.
Buch der Arithmetik 71.
Buch der Testamente 26, 27.
Buch der Zahl 45.
Buchstaben als Zahlzeichen 37—41, 43—45.
Buchstabenfolge 35, 70, 103, 110.
Buchstabennamen 91.
Bürgerliches Rechnen 48, 93.
buram 82.
Byzantinische Zahlzeichen 45.

Cafficii 101.
calcis etc. 83, 88, 89, 90, 92.
capitulum de pomis 60.
capitulum obviationis 61.
casus 109.
celentis 83, 84, 88, 89, 90, 92.
census 59, 61, 65.
Chaldäer 84—87.
Χοράσμιοι, Χωρασμία 4.
cifra 90, 91.
circulus 46.
collectio ac dispersio 18, 19.
completion and reduction 7.
complex number 76, 80.
compositio 17.
cosa, Coß 5, 56.

Ḍamm, alḍamm 20.
ḍarūrijj 77.
daur 26, 27, 47.
Deutsche Algebra 5, 65.
— Zahlen 47.
dhānam 60.
Diakritische Punkte 37, 41, 42, 44.
differentia 73, 74.
digitus 80.
ḍilʿ, aḍlāʿ 67, 69, 108.
Ding 56.
διπλασιασμὸς τοῦ Ζατρικίου 45.
Dirhem, dirham 9, 52, 53, 58, 60, 65.
dispersio 15.
dissolutio 17.
Division 12, 20, 25.

divisor 22.
Dīwānīziffern 41.
djebr, aldjebr 11, 12.
δραχμή 60.
dragma 59, 61, 101.
dschebr (s. a. alǵabr) 10.
Dual 11, 76.
duo modi 100.
Durchmesser 106.
δύναμις 35, 61, 68, 69.
δυναμοδύναμις 68.
δυναμόκυβος 68, 69.
δυναμοστόν 69.

Εἶδος, εἴδη 11, 60.
Eigenschaften der Zahl 91.
Einheit, Eins 35, 71, 72.
Einrichten 10, 11, 14.
elchal 82.
elchelif 82.
Elementarer Charakter der Algebra des M. b. Mūsā 29, 30, 70, 104, 109.
elewiul etc. 83.
elfazial 82.
elmechel 82.
eltermen 82.
Entschädigung 27.
Erbrecht, Erbteilungswissenschaft 6, 7, 49, 52.
Erbteilungsaufgaben 5, 6, 7, 23, 26, 27, 47—51, 57, 58, 61, 110.
Erdkarte 112.
Ergänzung und Ausgleichung 5, 7—14, 49.
Erniedrigung 12.
escebeha 83.
escendeliza etc. 83.
Essenz der Rechenkunst s. Behā eddīn.
ʿeštīn 84.
ethehiaser etc. 83.
ethemina 83.
ethezzea 83.
Etwas 8, 9, 56, 57, 58, 66, 108, 110.
Euklidkommentar 17.
εὐθεῖα 106.

Fachleute 36, 70, 111.
Faksimiletafel 90.
Fallort des Lotes etc. 108, 109.
farāʾiḍ 6, 22.
Farben 61.
Fihrist 15, 22, 29, 41, 42, 43, 47, 48.
Fläche des Bogens 106.
Flügel des Raben 86.
Frankenreich 81.
Freilassung i. d. Krankheit 26, 110.

Ǵabara 13.
ǵabr s. alǵabr.
ǵamaʿa 16, 50.
ǵamʿ, alǵamʿ 15, 16, 17, 19, 20, 21, 25, 50.
ǵanāḥ alǵurāb 86.
ganamalgurab 86.
geber 82.
ǵebr et mokabalah 29.
Gegenüberstellung 7, 35, 111.
Geld, Geldsumme 50, 56.
Geldsteuer 39.
Gelenkzahl 81.
Geographen 85, 111.
Geographische Tabellen 111, 112.
γεωγραφικὴ ὑφήγησις 112.
Geometer 13, 69.
Geometrische Beweise für Auflösung der quadr. Gl. 24, 25, 61, 67, 69.
Geometrischer Abschnitt der Algebra 6, 9, 23, 24, 26, 27, 35, 103—109.
Geometrisches Bild der Potenz 68.
Geschäftsrechnungen 5, 7, 10, 25, 27, 48, 49.
Geschätztes, Gewertetes 99.
Ghassanidenreich 37.
ǵiḏr, ǵuḏūr 8, 62—69.
Gleichungen 7—13, 16, 22, 24, 28, 33, 49.
Gleichungen der Planeten 112.
Glied, Gliedzahl 74, 76, 79, 80.
Ġobārziffern 43.
Griechen 3, 10, 27, 28, 30, 35—39, 41, 44, 60, 70, 103, 104, 113, 114.
Griechische Algebra 7, 11, 28, 29, 33, 70.
— Anthologie 61.
— Astrologie und Astronomie 28.
— Studien der Syrer 46.
— Terminologie 11, 60, 68, 69, 106.
— Zahlbuchstaben 38, 39, 40, 45.

Grundwörter 75, 76.
Gut, Güter 50.
γυνή 84.

Ḥaṭṭ, elḥaṭṭ 12, 21.
hau 35.
Hebräische Bruchzahlen 55.
— Schrift 43.
— Zahlbuchstaben 41, 43.
Heronisches Dreieck 108.
Hindu s. Inder.
ḥisāb aldaur 26, 47, 48.
ḥisāb alǵabr etc. 5, 8.
ḥisāb alhind, alhisāb alhindī 19, 47.
Höhe des Dreiecks 108.
ḥums 44.
hototalzagad etc. 82, 83.
ḥuṭūṭ alsā'āt 83.

Icchā 94, 96, 98.
icchāpala 94, 96, 98.
igin etc. 83, 84, 88, 89, 92.
ikmāl 9, 11, 13, 53.
'ilm alfarā'iḍ 6, 22, 48.
Inder 3, 10, 27—30, 34, 43, 46, 47, 60, 68, 69, 70, 73, 93, 103.
Indische Astronomie 28, 111, 112.
— Mathematik, insbes. Algebra und Rechenkunst 6, 18, 19, 27—35, 70, 74, 93, 109, 113.
— Zahlzeichen 18, 19, 30, 37, 41, 42, 43, 45, 47, 75, 78, 89, 91, 104.
inversely proportionate 97, 98.
irandu 84.
Irgend ein Ding 56.
Islam 36—38, 47.
istiḥrāǵāt alǵabr 13.
istiṯnā 13.
itmām 9, 82.
izālah 20.

Jahreszahlen 39.
Juden 3, 45.
Juppitertempel 60.
Juristen 49.
Juristische Arithmetik 7.

Ḳābala 11.
ḳābil bihi 9.
ḳafīz 101.
Kalifen 29, 39, 103.
καλότης 84.
Kapital 50.
Kapitel der Algebra 24 ff.
— der Messung 26, 35, 103 ff.
— von den Geschäften 26, 92 ff.
ḳasama 17.
κάθετος τμήματος κύκλου 106.
ḳaus 106.
ḳijāsu ḳaulihi 23.
kitāb alfihrist s. Fihrist.
— alǵabr walmuḳābalah 5, 27, 47, 48.
— alǵam' waltafrīḳ 14, 15, 16, 18, 19, 22, 47.
— alḫaṭā'ain 22.
— alḥisāb alhindī 19.
— altakmilah 48.
— altalḫīṣ fī 'ilm alfarā'iḍ 48.
— alwaṣājā 47, 48.
— alzijādah walnuḳṣān 15.
— ḥisāb aldaur 47, 48.
— nawādir alǵabr 47.
— ṣūrat alarḍ 112.
Klammerrechnung 17.
Knoten 80.
Kollationieren 11.
Kompensation 11.
Koptische Zahlzeichen 40.
Koran 49, 50, 52, 56.
Kreisabschnitt 107.
Kreiszahl 91.
Kufische Schrift 37.
κύβος 68.
κυβόκυβος 68, 69.
κυβοστόν 69.

Längenbezeichnungen 104.
Lateinische Merkverse 91, 92.
— Übersetzungen 65, 80, 81.
liber abbaci 47.
liber augmenti et diminutionis 14, 15, 22, 30, 59.
λογιστική 45, 93.

Männer der Zahl 79.
mafhūmah 55.
maǵmū' 17.

māl, amwāl 8, 9, 47, 50, 54, 56, 58, 60—67, 69, 82, 108.
μάντις 45, 93.
marātib 55, 76.
masḳiṭ alḥaǵar 108, 109.
Maßeinheit 104.
Mathematische Methode 34, 48.
mathesis forensis 7.
mauḍū'ah 55, 77.
Mekka und Medina 37.
μέρη 69.
μέθοδος ἀναλυτική 17.
— πολιτικῶν λογαριασμῶν 102.
— συνθετική 17.
— τῶν τριῶν 93.
miḳdār 14.
Milet 41.
Million 44.
Mondstationen 86.
mubhamah 55.
muḍāfah 55.
Muhammedaner 6, 27, 36, 52.
muḳābalah s. almuḳābalah.
mūla 68.
Multiplikation 12, 13, 20, 25, 69.
muṇru 84.
murakkabah 76.
muštaḳḳah 55, 76.
Musterbeispiele 49, 52.

Naḳaṣa 20.
Namen der Einer 84.
naṣīb 52.
Negatives Glied 10, 13.
Neskhī 37.
Neun Zeichen 41—46.
Neupythagoreer 35, 45, 72, 77, 78, 79, 84, 85, 114.
nisbah 102.
Nisbe 4.
nodi 80.
Normalformen 8, 12.
Notare 49, 52.
nuḳṣān 15, 17, 20, 25.
Null 41, 43, 45, 46, 84, 89, 90.
numeratio divinationis 15.
numerus absolutus 8.
— oppositus 100, 101.
numerus radicatus 69.
— simplex 8.
— beatificus 92, 114.

Operationen, algebraische 6, 8, 10, 11, 12, 14, 18, 32, 53.
Opposition 7, 11, 98.
ὁρμή 84.
ormis etc. 83, 84, 88, 89, 90, 92.

Palimpsest 40.
Papyri 37, 38, 40, 46.
Parallelogramm 107.
Pehlevi 33.
περιφέρεια 106.
Perser 3, 32, 33, 36, 111, 112.
Persische Schrift 43.
— Sprache 4.
— Zahlwörter 43.
Petra 37.
Pfeil 106.
phalam 94, 96, 98.
πλευρά 67, 68.
Politische Arithmetik 93.
potentia 61.
Potenz 61, 63, 69.
Potenzen von Tausend 44.
— von Zehntausend 44.
prāmana 94, 96, 98.
Projektionen 109.
Proportionen 101, 102.
προσθεῖναι 11.
ψῆφος 89.
Pyramidenstumpf 109.
Pythagoreer s. Neupythagoreer.
Pythagoreischer Lehrsatz 103.

Ḳenneśrīn 46.
Quadrat der Unbekannten 35, 54, 59, 63, 64, 67, 69.
Quadrat einer Zahl 64, 69, 91.
Quadratische Gleichungen 24, 28, 49, 60, 61, 67.
Quadratseite 66—69.
Quadratwurzel 63, 65, 68.
quantity 67.
quantum tantum 60.

Quellen 3, 5, 7, 10, 23, 27, 28, 32, 35, 36, 52, 70, 103, 104, 112.
quimas 83, 88, 89, 90, 92.

Radix 68.
Rangstufen der Zahlen 55, 76, 77, 78.
Raute 105, 107.
Rechenkunst 16, 18, 19, 20, 22, 46, 47, 48, 73.
Rechtsgelehrte, Rechtswissenschaft 22, 47, 49.
Reduktion 7, 8, 9.
Regel de tri 35, 45, 49, 93—102, 104.
— der zwei Fehler 15, 16, 22.
— der zwei Wagschalen 15.
regula elchatayn 15.
— infusa 21.
— inversa 21.
— sermonis 21, 22, 99.
res 59, 67.
restauratio et oppositio 7.
restoring and comparing 7.
ῥητός 64.
ῥίζη 35, 68.
Rhombus 105.
Rinderproblem 61.
Rippen 67.
Römische Zahlzeichen 42, 47, 75.
root 62, 63.
rules of thumb 33.
rūpaka, rūpa 60.

Sache 35.
sahm 52, 106.
Sammlung Erzherzog Rainer 37, 38.
Sammlung — Zerstreuung 17.
Schachaufgabe 45.
schai', šai' 9, 35, 47, 56—60, 66, 67, 108.
Schatzhaus, Schatzkammer 13, 40, 50.
Schätzung 99.
Schicksalswechsel 26, 27.
Sefer ha-mispar 45.
Sehne 106.
Seiten 67, 105 (108).
σελήνη 84.
Seligmachende Acht 92, 114.
Siddhānta 111, 112.
ṣifr 88, 89, 90.
Sindhind 112.
sipos 88, 90.
siriace 86.
Siyāq Method 41.
Spica 86.
square 54, 62, 63, 67.
square-root 62.
Steuerbeamte 49.
Steuerertrag 50, 56.
Steuerurkunden 40.
Stumme Brüche 54, 55, 56.
Stumme Zahl 55.
Stundenkreis 83.
Stundenlinien 83.
substantia 65.
Subtraktion 12, 20, 21, 25.
Summation 16.
surdus 64.
σύνθεσις 22.
Syrer 3, 32, 33, 41, 44, 45, 46, 110.
Syrische Bruchzahlen 54.
— Zahlbuchstaben 41.

Tabelle der arab. Zahlzeichen 44.
tafrīḳ, altafrīḳ 15—21.
Tafeln des Schah 111.
tafṣīl 20.
taḥlīl 21.
taksīr 106.
tamām 108.
ṭarīḳ altaḥlīl 17.
ṭarīḳ altarkīb 17.
Tausender 44.
Teilung 25.
temenias etc. 83, 88, 89, 90, 92.
Terminologie 3, 7, 9, 10, 14, 20, 33, 36, 50, 51, 54, 56, 60, 63, 67, 69, 81, 96, 101, 102, 108, 111.
Testamente 26.
τετράγωνος 68, 69.
Textaufgaben 8, 9, 11.
Theologumena 92.
thuld 85.
tisu 84.
Titel (der Algebra usw.) 5, 7, 14—19.
trairâçikam 94.
Trennung 17, 19, 20.

ṯulṯ 54.
two nations 97, 98.

Übersetzer 65, 73, 80, 81, 101.
Übersetzungen 3, 4, 7, 15, 22—25, 33, 38, 42, 52, 69, 72.
ʿuḳūd s. ʿaḳd.
Umkehrungsverfahren 21, 22.
Umschrift arabischer Worte 4, 8, 88.
Unbestimmte Analytik 31.
unitates 79, 80, 81.
Unpaarige Zahl 91.
ʿušr 54.

Varga 35.
Verdoppelung 20.
Vereinigung 16, 17, 19, 20.
Verfahren mit der angenommenen Zahl 15.
Verhältnisse 101, 102.
Verheiratung in Krankheit 26.
Verminderung 15.
Vermögen 8, 9, 50, 51, 58, 60, 61.
Vertauschung 26.
Vervollständigung 9, 11, 26, 108, 110.
Vierecke 107, 108.
Viereckszahl 69.
Vollkommene Zahl 91, 92.
Vollständige Zahl 91.
Vorausbezahlung 27.
Waḍʿijj 77.
Wage der Weisheit 45.
watar 106.
Wegschaffen von Brüchen 13.
Wert 99.
Werte von π 103, 105.
Wiederherstellung und Gegenüberstellung 7, 35, 111.
Wortrechnung 22, 23.
Wortschrift der Zahlen 41.
Würfel, Würfelzahl 68, 69, 91.
Wurzel 8, 25, 35, 62, 64, 105.
Wurzel der Zahl 35, 71, 91.

Yāvat tāvat 60.
ὑπάρχοντα 60.

Zahl 13, 14, 69, 71.
Zahlbezeichnungen 36, 114.
Zahlensystem 24, 35, 70—73.
Zahlgröße 64.
Zahlwörter 75.
zenis etc. 83, 88, 89, 90, 92.
zensus 65.
Zerlegung 17, 20.
Ziffern im Abendland 30, 47, 75.
zijādah 15, 20, 106.
Zurückführung 8, 9, 11.
Zusammensetzung 21.

II. Verzeichnis der Eigennamen.

Kleine Varianten in der Umschreibung arabischer Namen sind nicht berücksichtigt; einige Namen sind doppelt angeführt.

'Abd al Ḥamīd 47.
'Abd al Ḳāhir b. Ṭāhir 48.
'Abdallāh 39.
'Abdallāh b. Ǵābir 38.
'Abdalmelik 39.
Abraham 22.
Abraham ben Ezra 45.
Abū Ḥanīfah 26, 27, 49, 110, 111.
Abū Kāmil Šuǵā' b. Aslam 16, 22, 47.
Abu'lwafā 29.
Abū Ṣāliḥ 22.
Ahlwardt 48.
Aḥmad b. Ḥanbal 49.
Ajjūb al Baṣrī 22.
Ajjūb b. Sulaimān 22.
Albērūnī 34, 45.
Alchoarismi, Alchwarizmī, Algaurizim, Algoritmi, Alḫwārazmī, Alkhārizmi usw. 4, 7, 11, 18, 30, 33, 35, 36, 73, 93, 94, 111, 112.
Alcuin 81.
Algebras 84.
Algorithmus 4.
Alḫāzinī 45.
Alkarḫī 13, 20, 54, 64, 69.
Alma'mūn 29, 46, 112.
Alwalīd 39, 114.
Annadīm 41.
Annairīzī 17.
Āryabhaṭṭa usw. 30, 31, 32, 94.
Athelhard von Bath 81, 85.
Averroes 4.

Bannier 81.
Becker 38, 39.
Behā eddīn 15, 20, 33, 54, 102.
Besthorn 17, 85.
Bhāskara 29, 30, 32, 33, 94, 95, 96, 104, 106, 107, 108.
al Bīrūnī 34, 45.
Björnbo 4, 23, 85.
Boethius, Boetius 30, 45, 68, 81, 88.
Boncompagni 18, 19, 55, 71.
Bosmans 4.
Brahmagupta 29, 30, 32, 94, 106, 107.
Breydenbach 87.
Bubnow 82, 84, 86.

Cantor 6, 7, 10, 14, 15, 17, 21, 22, 23, 30, 34, 36, 37, 40, 45, 46, 49, 54, 60, 61, 64, 67—71, 75, 77, 78, 80, 81, 83, 91, 92, 93, 103, 105, 108, 109, 111, 114.
Carra de Vaux 11, 12, 21.
Chasles 30.
Clair-Tisdall 41.
Clive Bayley 46, 84.
Colebrooke 4, 6, 7, 27, 28, 32, 34, 94, 95, 104, 106, 107, 108.
Cossali 23, 27.
Curtze 17.

Dalman 54.
Dieterici 55, 75, 77, 78, 101, 109.
al Dīnawarī 47.
Diophant 11, 28—35, 68, 69.
Dozy 13, 98.
Duval 44.

Eneström 4, 16, 17, 43, 72, 76, 81, 82, 85, 113.
Ersch und Gruber 37.

Euklid 29, 30, 35, 64.
Euklides 84.

al Fazārī 112.
Flügel 22, 29, 42.
Freytag 13.
Friedlein 88, 90.

Gerbert 82, 86.
Gerhard von Cremona 4, 23, 81.
Gesenius 37.
Ghaligai 82.
Günther 7, 36, 54, 64, 65.

al Ḫabrī 48.
Ḥaǵǵāǵ 17.
Ḥāǵǵī Ḫalīfa 6, 7, 22, 48.
Hankel 4, 6, 7, 30, 31, 32, 34, 60, 61, 103, 105.
Hartmann 87.
Hārūn al Rašīd 30, 113.
Heiberg 17, 45, 81, 93.
Heis 60.
Helmreich 84.
Heron 35, 104, 109.
Hochheim 13.
Hofmann 44.
Hultsch 93.
al Ḫwārazmī 4 ff.
Hypatia 30.

Ibn al Adamī 112.
Ibn al Bannā 77.
Ibn al Faraḍī 48.
Ibn al Hā'im 12, 20, 21.
Ibn al Ḳifṭī 112.
Ibn Ḥadīd 38.
Ibn Ḫaldūn 6, 7, 14, 19, 21.
Ibn Rušd 4.
Ibn Waḥšija 43.
Ibrāhīm 22.
Iḫwān aṣ-ṣafā 13, 19, 21, 43, 44, 55, 56, 69, 75, 77, 78, 79, 87, 91, 101.

Jezdegird 112.
Job f. Salomonis 21, 22.
Johannes 38.
Johannes Hispalensis, Johannes von Sevilla 4, 55, 67, 80.
Juynboll 52.

al Kalaṣādī 48, 77.
Karabacek 38, 40, 44, 46.
Karpinski 4, 24, 41, 42, 43, 46.
Kaye 33, 34, 113, 114.
Ḳazwīnī 41.
al Khārizmī usw. 4.
v. Kremer 6.

Lagrange 31.
Lane 5.
Larfeld 41.
Leonardo Pisano 47, 64.
Libri 8, 14, 15, 21, 23, 25, 59, 61, 76, 79, 100.
Löw 105.

Mahāvīra 95.
Mālik b. Anas 49.
al Ma'mūn s. Alma'mūn.
Marre 4, 103, 104, 105.
Maslama b. Aḥmad al-Maǵrīṭī 85, 112.
Maximus Planudes 45.
Merx 44.
al Missīsī 48.
Moritz 37.
Mortet 91.
Muḥammad al Šāfi'ī 49.
Muḥammad b. Mūsā 4 ff.
Muhammed 36.
v. Mžik 112.

Nallino 112.
al-Nadīm 41.
al-Narizius 17.
Nau 45, 46.
Nesselmann 7, 15, 102.
Nikolaus Rhabdas 93, 102.
Nikomachus 35, 68, 72.

'Omar al Ḫajjām 13.

Pauly-Wissowa 93.
Pertsch 43.
Platon 93.
Plato von Tivoli 81.

Probst 87.
Ptolemaeus 112.

Qorra b. Šarīk 38.
Quatremère 20.

Radulph von Laon 83, 84, 85, 86.
Rainer 37, 38.
Rašīd 39
Robert von Chester 4, 24, 80, 81.
Rodet 32, 33, 34, 113.
Rosen 3—9, 23, 26—30, 34, 50, 51, 53, 54, 57, 58, 62—67, 71, 75, 79, 80, 96, 97, 98, 101, 103, 104, 105, 108.
Rudolff 5.
Ruska 41, 46, 112.

Sachau 34.
de Sacy 37, 41, 43, 44.
Schanz 73.
Schott-Reinhardt 38, 39.
Sédillot 29, 30.
Send ben Alī 15.
Severus bar Šakkū 46.
Severus Sabokht 45, 46.
Silberberg 45.
Sinān b. al Fatḥ 15, 48.
de Slane 20.
Smith 4.
Smith u. Karpinski 4, 47, 85, 88.
Steinschneider 24.
Suter 4, 12, 16, 22, 47, 48, 81, 82, 85, 111, 112.

Taḳī eddīn el Ḥanbalī 12.
Tannery 68, 93, 102.
Theon von Smyrna 35, 72.
Theophanes 40.
Tropfke 10, 65, 67, 68, 93.
Turchill 85.

Unger 46, 47.

van Vloten 4, 105.
Vullers 4.

Wahrmund 105.
al Wannī 48.
Wiedemann 4, 45, 46.
Wieleitner 58, 113.
Woepcke 4, 13, 14, 16, 30, 37, 40, 77, 78, 84.

Yohannan 42.

Druckfehler.

Seite 35 Zeile 9 v. u. lies ῥίζη statt ῥίζα.
„ 41 „ 16 v. o. „ תק statt חק.
„ 42 „ 8 v. o. „ ت statt ط.
„ 65 „ 7 v. u. „ *muḳābalah*.

Inhalt.

Seite
Einleitung 3
I. Der Titel der Algebra des Muḥammad b. Mūsā 5
II. Das Liber augmenti et diminutionis und das kitāb algamʿ waltafrīḳ 14
III. Die Regula Sermonis 21
IV. Inhaltsübersicht der Algebra Muḥammad b. Mūsās und Beurteilung ihrer Quellen von Cossali bis Cantor 23
V. Zur Geschichte der arabischen Zahlbezeichnungen 36
VI. Über die Erbteilungsaufgaben in der Algebra des Muḥammad b. Mūsā und die ursprüngliche Anwendung der Termini *māl* und *schai'* 47
VII. Die Terminologie der quadratischen Gleichungen 61
VIII. Zum Aufbau des Zahlensystems 70
IX. Die Namen der arabischen Ziffern 82
X. Das Kapitel von den Geschäften 92
XI. Aus dem Kapitel über die Messung 103
XII. Muḥammad b. Mūsās Algebra als Teil seiner wissenschaftlichen Gesamtleistung 109

Register:
I. Wort- und Sachregister 115
II. Verzeichnis der Eigennamen 122